Wrocław University of Technology

Teoria systemów i mechanizmów

Opracował:
dr inż. Przemysław Jaszak

Katedra Mechaniki, Maszyn, Urządzeń
i Procesów Energetycznych

ul. Na Grobli 15, Wrocław
bud. L-1, pok. 312
tel. 71 320 4825

Wykład 4

Metody rozwiązywania układów kinematycznych

Metody rozwiązywania układów kinematycznych

Metoda wykresów kinematycznych

Metoda wykresów kinematycznych

Wykresy kinematyczne są graficznym przedstawieniem zależności funkcyjnej drogi, prędkości lub przyspieszenia dowolnego punktu członu mechanizmu od określonego parametru. Parametrem funkcji jest zazwyczaj czas, a w niektórych przypadkach może być to inna współrzędna uogólniona, np. droga lub kąt obrotu członu czynnego.

$$s = s(t)$$

$$s = s(\alpha)$$

Wykonanie wykresu kinematycznego polega na zróżniczkowaniu lub scałkowaniu przyjętej zależności funkcyjnej.

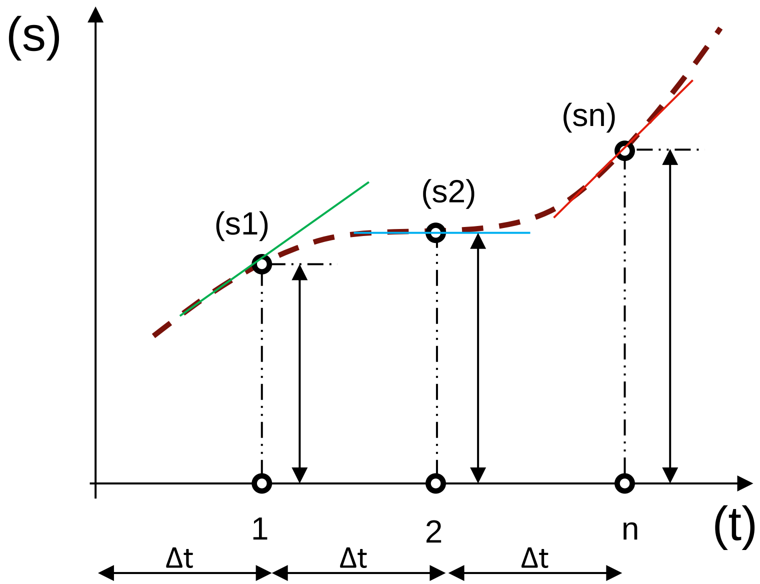
$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$v = \int a dt$$

Metoda wykresów kinematycznych

Różniczkowanie graficzne metodą stycznych

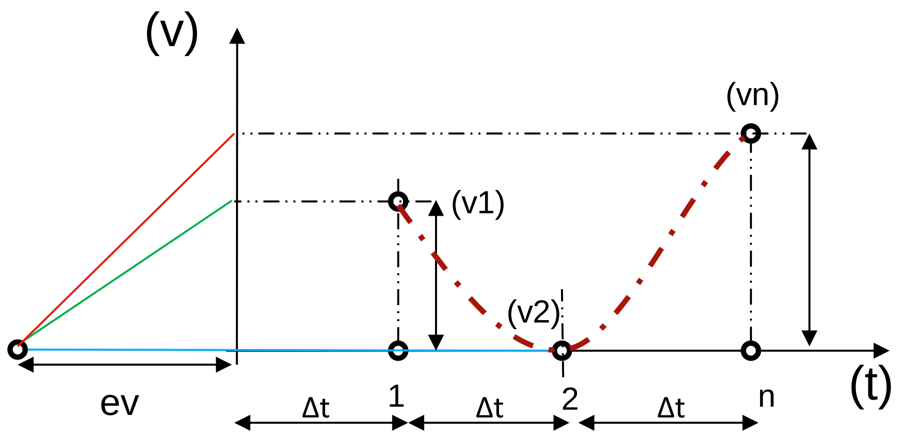
Metodę tą wykorzystuje się głównie do wyznaczenia prędkości lub przyspieszenia dowolnego punktu członu, po uprzednio wyznaczonej jego trajektorii. Trajektorię tą przedstawia się w postaci wykresu o osiach (s, t). Na osi odciętych, w jednakowych odległościach przyjmuje się punkty 1, 2 … n reprezentujące stałe odstępy czasu Δt. Z punktów tych prowadzi się proste prostopadłe do osi odciętych w kierunku przebiegu funkcji s(t). Przecięcie tych linii z przebiegiem funkcji wyznacza punkty s_1, s_2 .. sn. Następnie w wyznaczonych punktach prowadzi się styczne do przebiegu krzywej. (Ciąg dalszy opisu na następnym slajdzie).



Metoda wykresów kinematycznych

Różniczkowanie graficzne metodą stycznych

Następnie wykonujemy wykres o osiach (v, t). Podobnie jak poprzednio na osi (t) odmierzamy stałe odcinki czasu Δt i z punktów 1, 2, n prowadzimy proste prostopadłe do osi odciętych. Kolejno po ujemnej stronie osi (t) wykreślamy dowolny odcinek e_v. Z końca odcinka e_v prowadzimy proste równoległe do uprzednio wyznaczonych stycznych, które przecinamy z osią(v). Z wyznaczonych na osi v punktów prowadzimy proste poziome, które w przecięciu z liniami pionowymi wyznaczają odcinki proporcjonalne do prędkości odpowiadające punktom 1, 2 …n.



Metoda wykresów kinematycznych

Różniczkowanie graficzne metodą stycznych

W celu odczytania dowolnej wartości prędkości, wyznaczonej graficznie z przebiegu funkcji (v)= f(t) otrzymujemy:

$$v_i = (v_i)\,\kappa_v,$$

podziałkę prędkości należy wyznaczyć zgodnie z zależnością:

$$\kappa_v = \frac{\kappa_s}{\kappa_t \cdot e_v}.$$

gdzie: κ_s - przyjęta podziałka przemieszczeń κ_t - przyjęta podziałka czasu

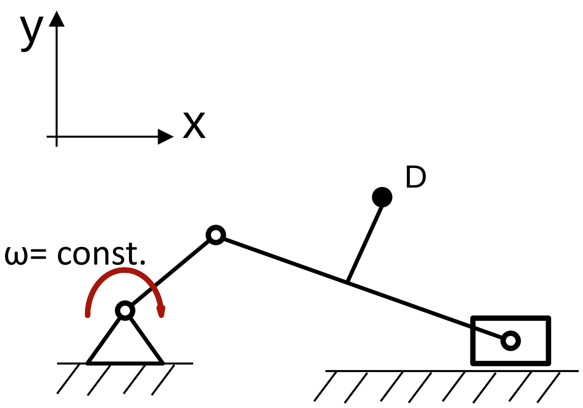
W przypadku wyznaczania wartości przyspieszenia:

$$a = (a)\kappa_a \qquad \kappa_a = \frac{\kappa_v}{\kappa_t \cdot e_a}.$$

Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

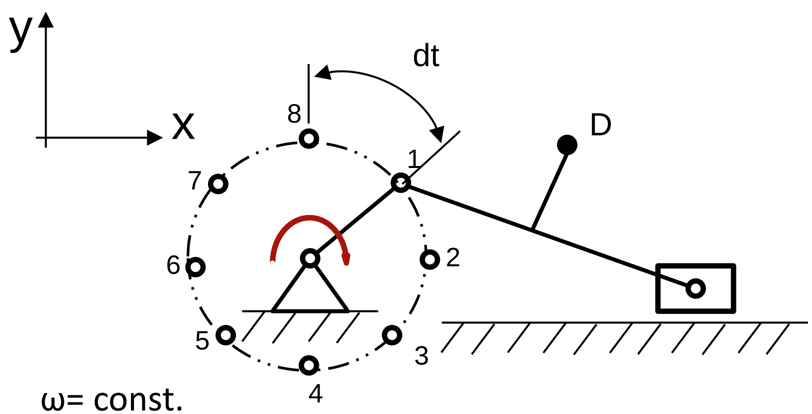
Wykorzystując metodę wykresów kinematycznych, wyznaczyć przebieg prędkość punktu D mechanizmu przedstawionego na poniższym rysunku.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

Ponieważ człon napędowy wykonuje ruch obrotowy ze stałą prędkością to wyznaczamy dla niego tor cechowany.

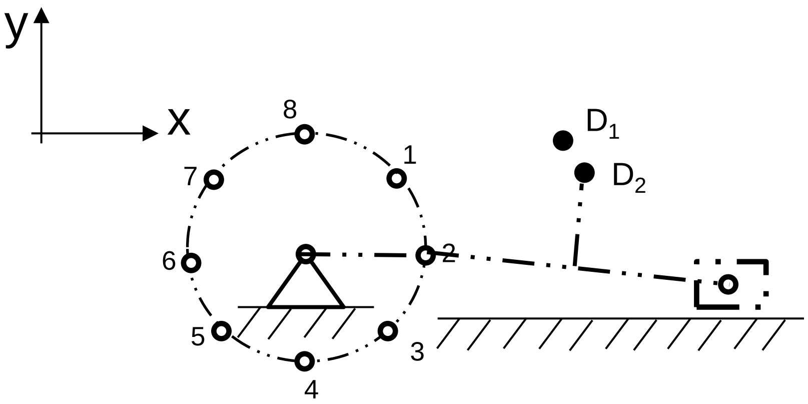


ω= const.

Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

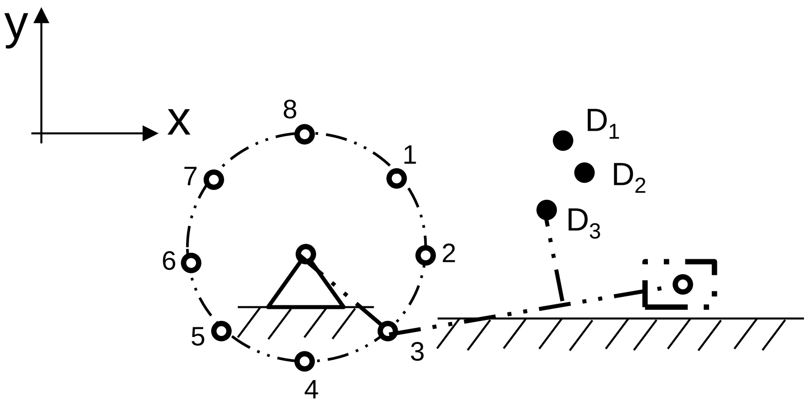
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

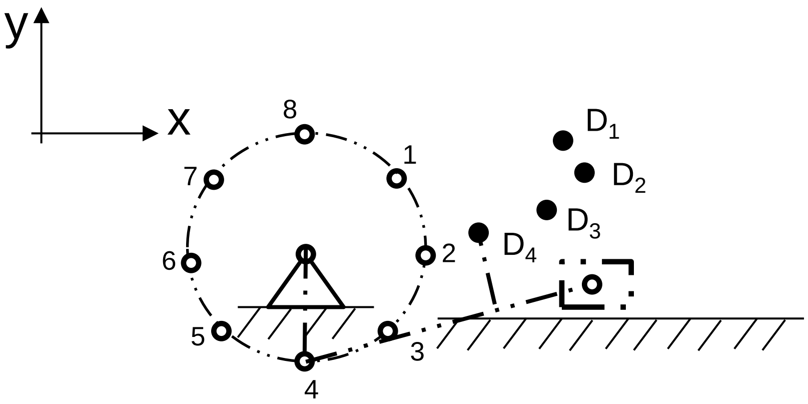
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

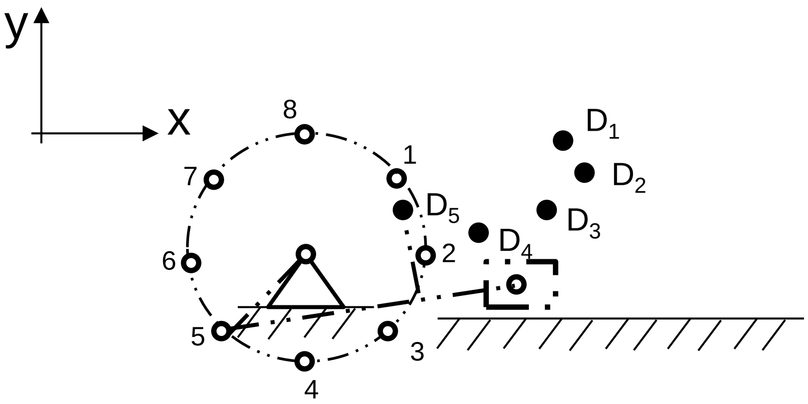
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

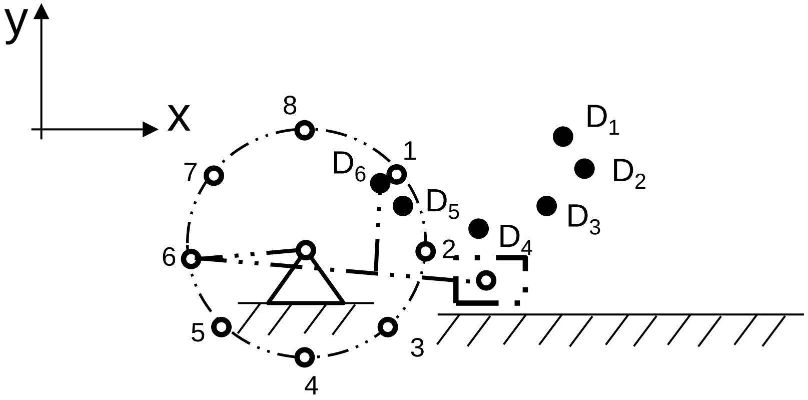
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

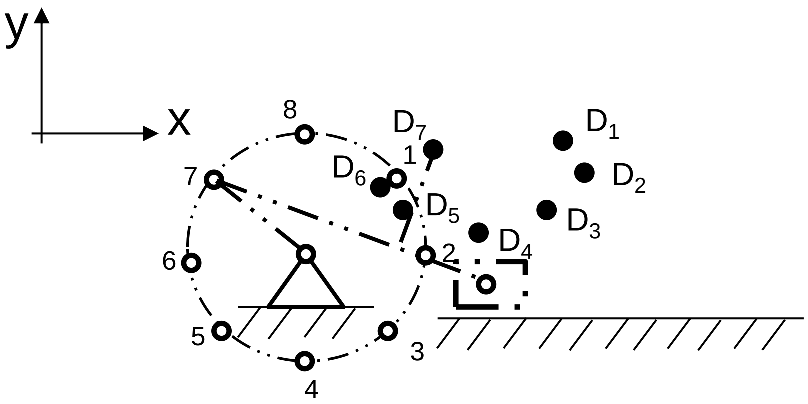
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

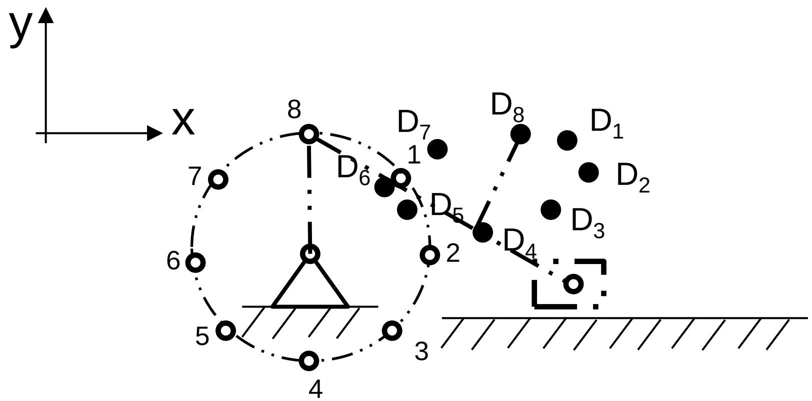
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

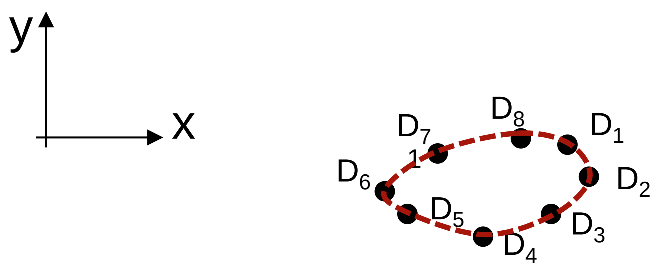
Następnie w sposób graficzny wyznaczamy kolejne położenia punktu D mechanizmu w przyjętych punktach toru cechowanego.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

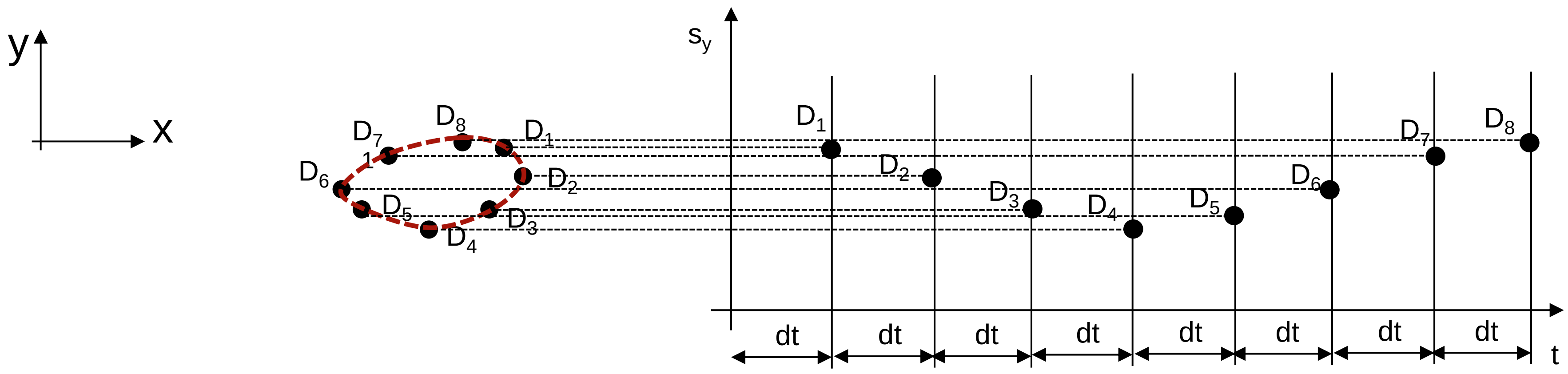
Wyznaczone punkty od D_1 do D_8 pozwalają na wykreślenie toru cechowanego punktu D.



Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

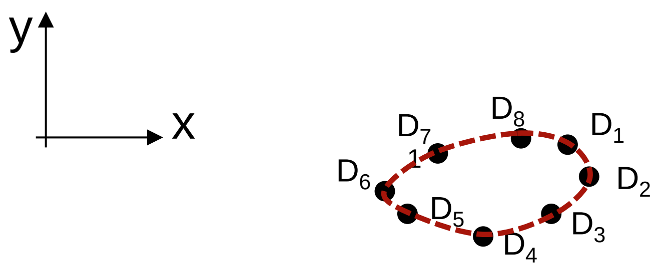
Następnie rysujemy wykres o osiach s_y,t ze stałą podziałką czasu Δt i przenosimy wyznaczone położenia punktów od D_1 do D_8.

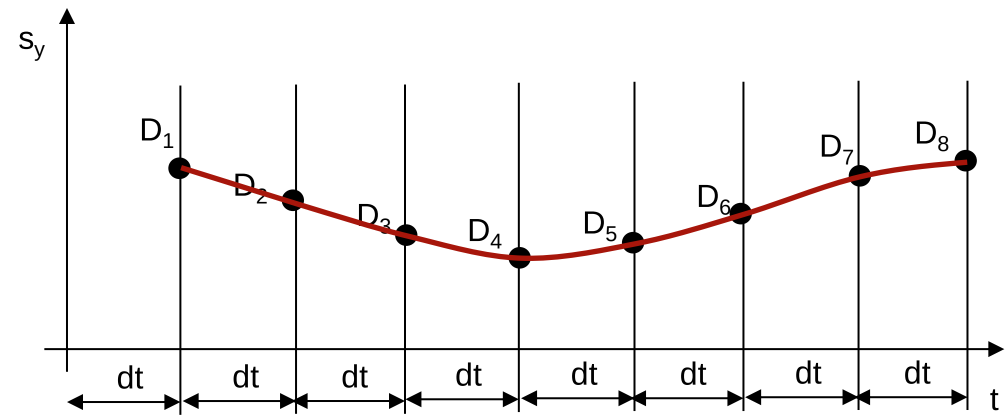


Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

Połączenie punktów od D_1 do D_8 na wykresie, wyznacza przebieg krzywej s_y w funkcji czasu.

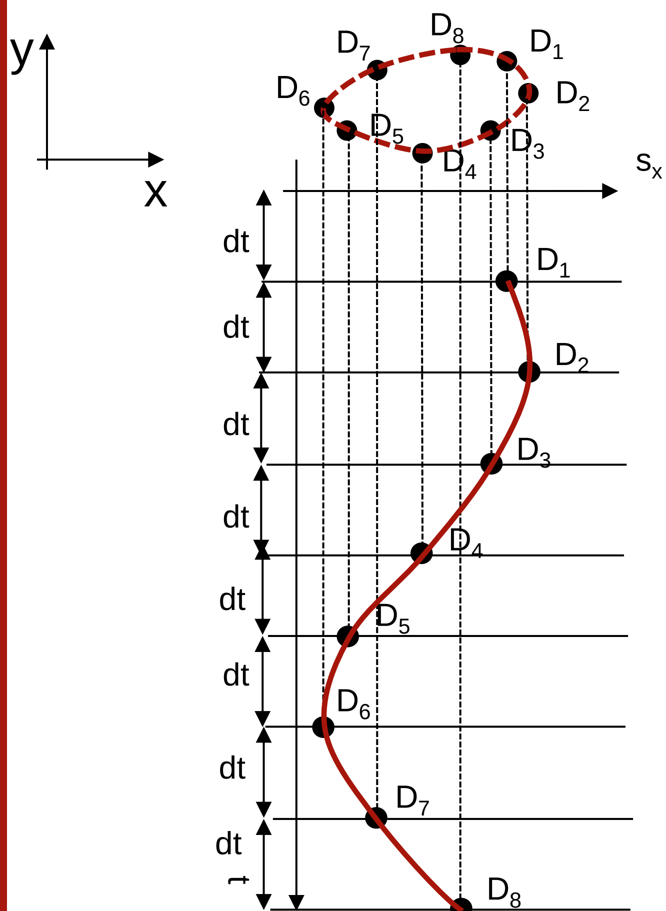


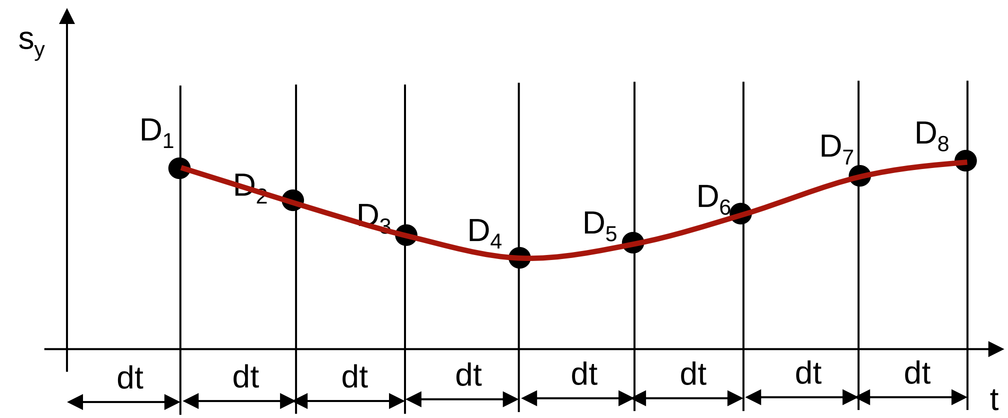


Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

W ten sam sposób jak poprzednio rysujemy wykres (s_x, t)

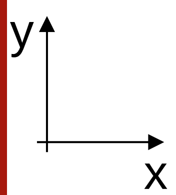


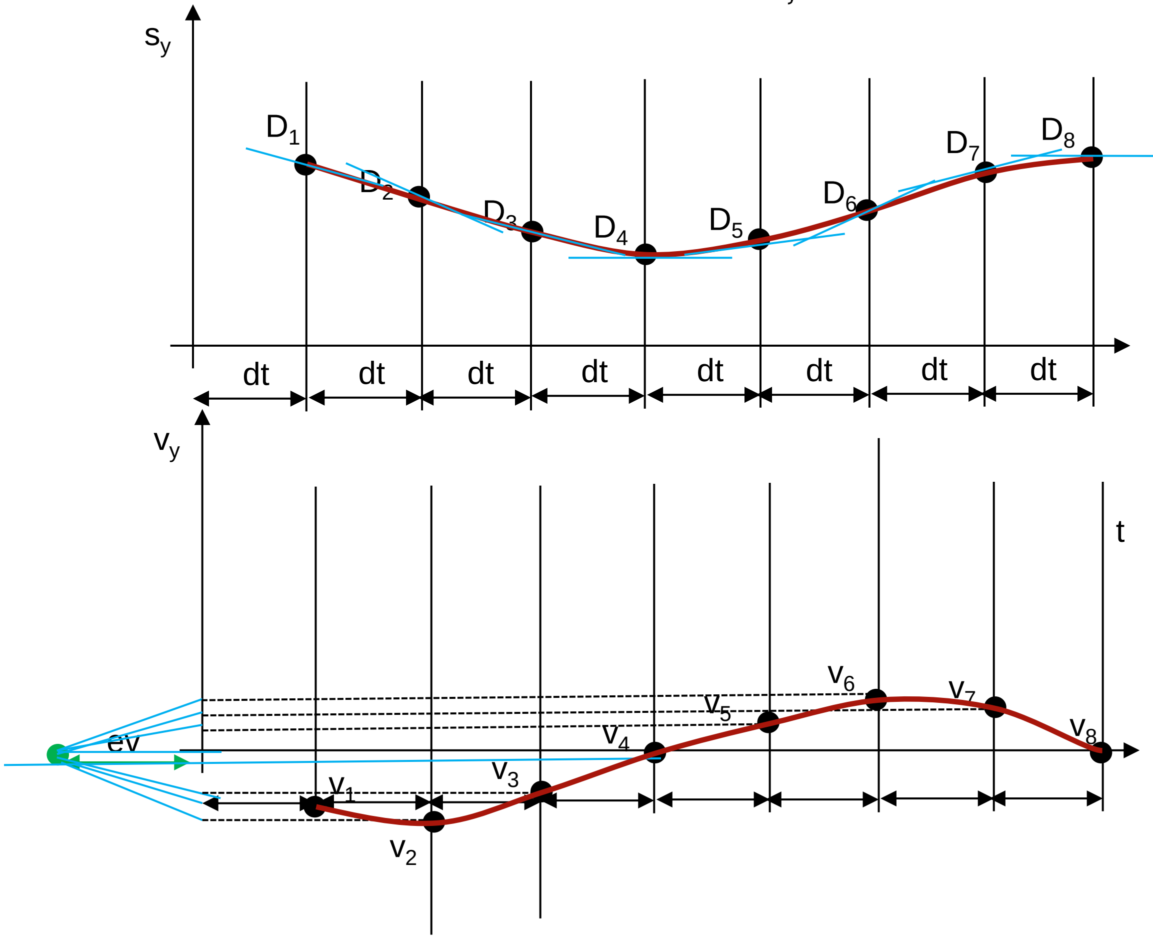


Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

Wykorzystując graficzne różniczkowanie metodą stycznych otrzymujemy krzywą v_y (t)

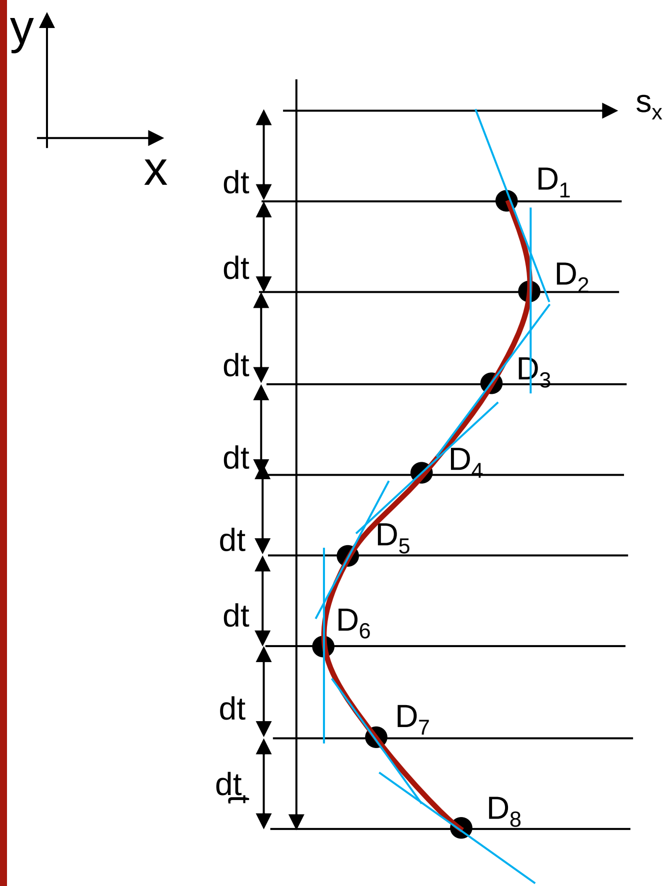


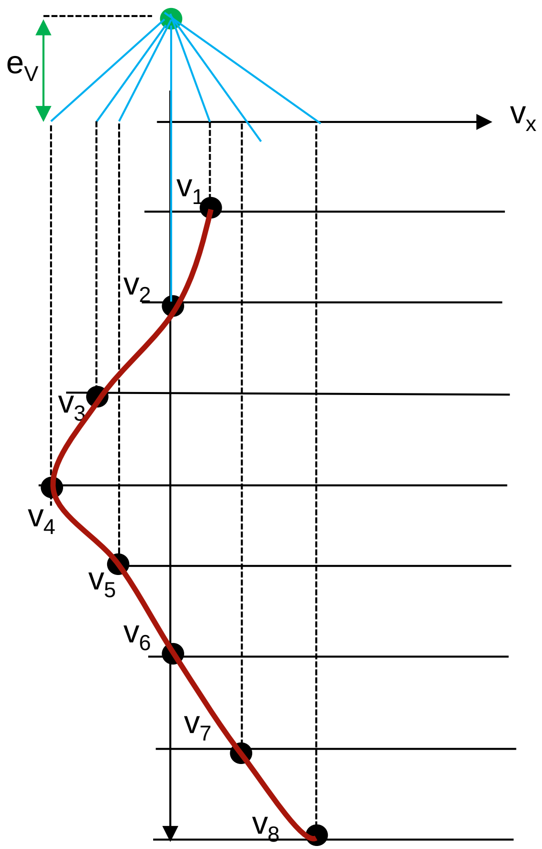


Metoda wykresów kinematycznych

Przykład

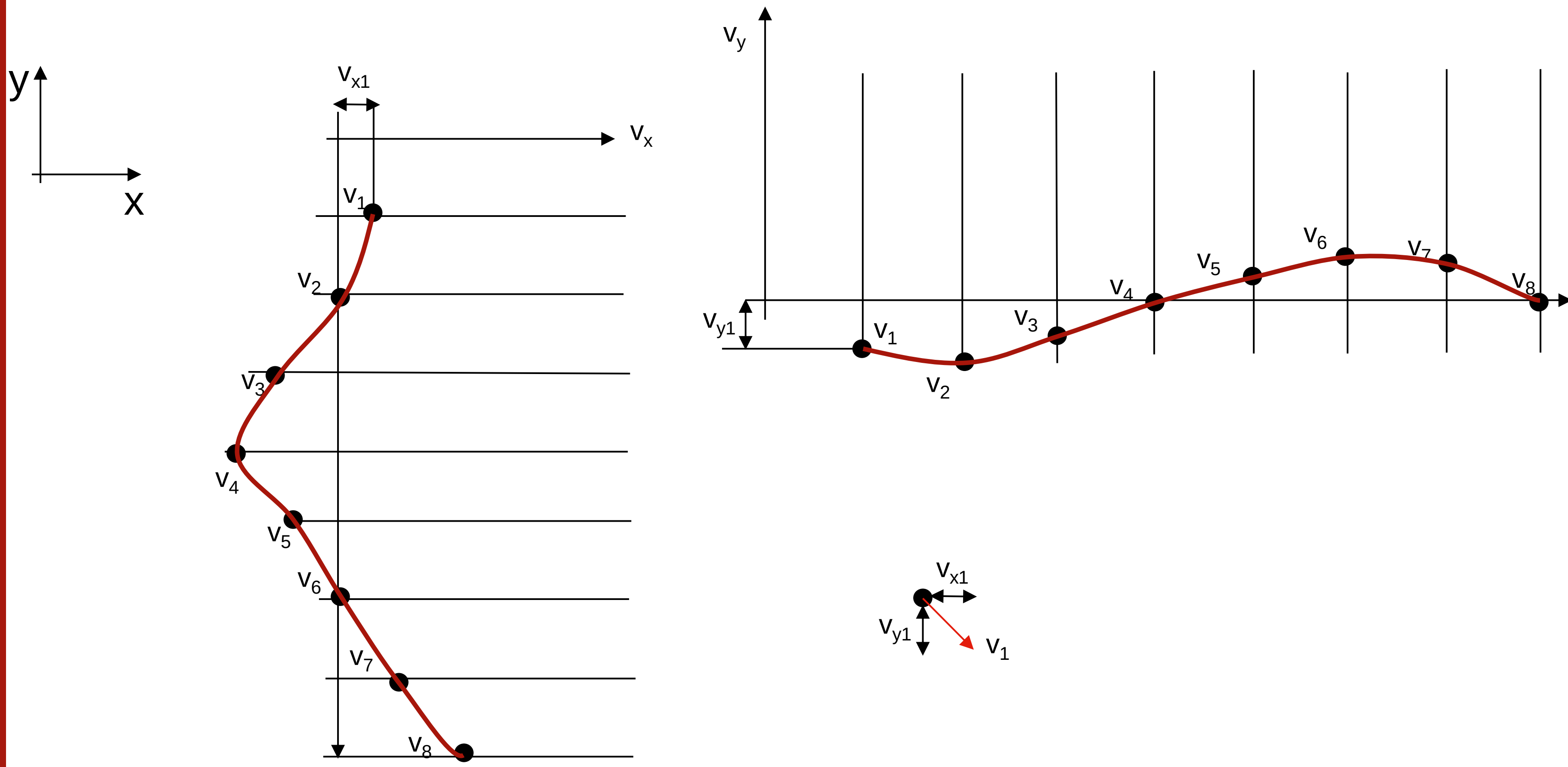
W ten sam sposób jak poprzednio tworzymy wykres (v_x, t)





Metoda wykresów kinematycznych

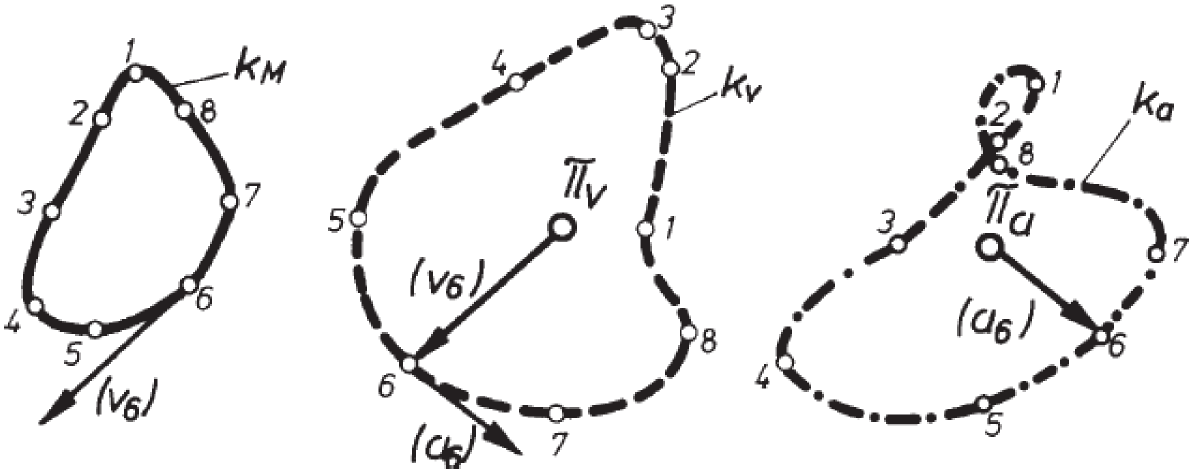
Przykład Prędkość punktu D w danej chwili wyznaczamy jako wypadkową składowej v_x i v_y



Metoda wykresów kinematycznych

Hodograf

Wykreślenie wektorów wypadkowych prędkości lub przyspieszenia z jednego, wspólnego punktu (bieguna) π tworzy tzw. hodografy prędkości lub przyspieszenia. Zestawienie takie pozwala na weryfikację poprawności wykonania metody graficznej, ponieważ wektory prędkości wyznaczone w danych punktach trajektorii są do niej styczne. Podobnie wektory przyspieszenia w danych punktach ruchu są zawsze styczne to krzywej hodografu prędkości.



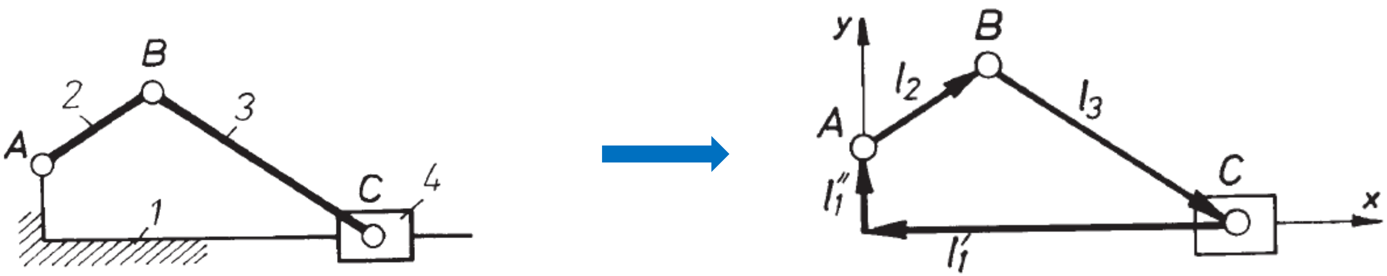
Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Metoda ta polega na zastąpieniu łańcucha kinematycznego członów mechanizmu odpowiednim zapisem wektorowym.



Przy zapisie łańcucha w sposób wektorowy muszą zostać spełnione poniższe zależności.

$$\sum \bar{l}_i = 0$$

lub

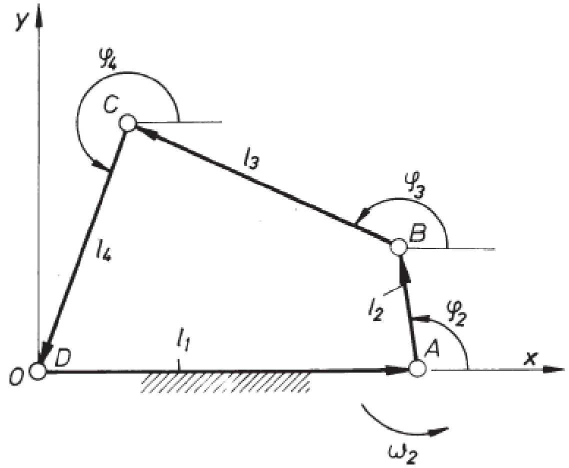
$$\sum l_{ix} = 0,$$

$$\sum l_{iy} = 0,$$

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Po zastąpieniu członów układu odpowiednimi długościami wektorów należy w jednolity sposób oznaczyć kąty kierunkowe wektorów - patrz poniżej.



Przy takim oznaczeniu, rzuty poszczególnych wektorów na osie układu współrzędnych można zapisać w postaci ogólnej:

$$l_{ix} = l_i \cos \alpha_i,$$

$$l_{iy} = l_i \sin \alpha_i.$$

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Związki określające prędkości i przyspieszenia otrzymuje się na drodze różniczkowania względem czasu równań położenia.

prędkość

$$\sum \frac{\mathrm{d}l_{ix}}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$\sum \frac{\mathrm{d}l_{iy}}{\mathrm{d}t} = 0$$

przyspieszenie

$$\sum \frac{\mathrm{d}^2 l_{ix}}{\mathrm{d}t^2} = 0,$$

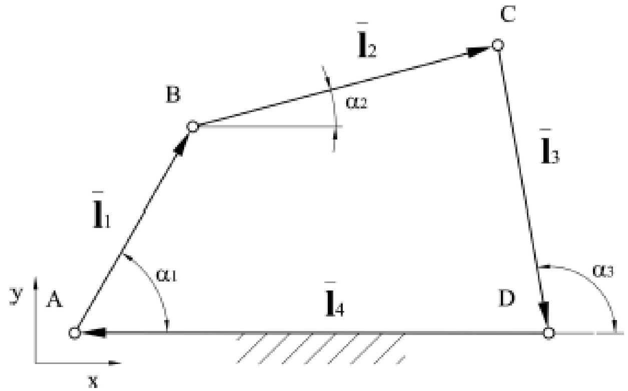
$$\sum \frac{\mathrm{d}^2 l_{ix}}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Przykład

Dany jest czworobok przegubowy ABCD o znanych długościach członów l_1,l_2, l_3,l_4



Po wprowadzeniu przyjętych kątów, zapisujemy sumę rzutów wektorów na odpowiednie osie układu współrzędnych. Poniższy zapis stanowi tzw. równanie położenia członów mechanizmu.

$$l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos\alpha_2 + l_3 \cos\alpha_3 + l_4 = 0$$

$$l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin\alpha_2 + l_3 \sin\alpha_3 + l_4 = 0$$

Przy założeniu, że kąt α_1 jest kątem zadanym (człon napędowy) wyznacza się wartości kątów α_2 i α_3.

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

Po zróżniczkowaniu równania położenia otrzymujemy równanie prędkości:

$$-l_1 \sin\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 - l_2 \sin\alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2 - l_3 \sin\alpha_3 \cdot \dot{\alpha}_3 = 0$$
$$l_1 \cos\alpha_1 \cdot \dot{\alpha}_1 + l_2 \cos\alpha_2 \cdot \dot{\alpha}_2 + l_3 \cos\alpha_3 \cdot \dot{\alpha}_3 = 0$$

Przy znanym położeniu członu napędowego i jego prędkości kątowej, z powyższych równań wyznacza się wartości kątowe członów 2 i 3.

$$\alpha_1 = dane \quad \dot{\alpha}_1 = \omega_1 = dane$$

szukane $\begin{cases} \dot{\alpha}_2 = \omega_2 \\ \dot{\alpha}_3 = \omega_3 \end{cases}$

Metody analityczne

Metoda zapisu wektorowego

W wyniku różniczkowania równania prędkości otrzymuje się równanie przyspieszenia:

$$-l_1\left(\cos\alpha_1\cdot\dot\alpha_1^2+\sin\alpha_1\cdot\ddot\alpha_1\right)-l_2\left(\cos\alpha_2\cdot\dot\alpha_2^2+\sin\alpha_2\cdot\ddot\alpha_2\right)-l_3\left(\cos\alpha_3\cdot\dot\alpha_3^2+\sin\alpha_3\cdot\ddot\alpha_3\right)=0$$
$$l_1\left(-\sin\alpha_1\cdot\dot\alpha_1^2+\cos\alpha_1\cdot\ddot\alpha_1\right)+l_2\left(-\sin\alpha_2\cdot\dot\alpha_2^2+\cos\alpha_2\cdot\ddot\alpha_2\right)+l_3\left(-\sin\alpha_3\cdot\dot\alpha_3^2+\cos\alpha_3\cdot\ddot\alpha_3\right)=0$$

Z równania należy wyznaczyć wartości przyspieszeń kątowych członów 2 i 3 przy znanej wartości kąta położenia członu napędowego oraz jego prędkość kątowej, a także (przy stałej prędkości kątowej) przyspieszeniu równym zero.

$$\alpha_1 = dane \quad \dot\alpha_1=\omega_1=dane \qquad \ddot\alpha_1=\frac{d\omega_1}{dt}=\varepsilon_1=0$$

szukane $\begin{cases}\ddot\alpha_2=\varepsilon_2\\ \ddot\alpha_3=\varepsilon_3\end{cases}$

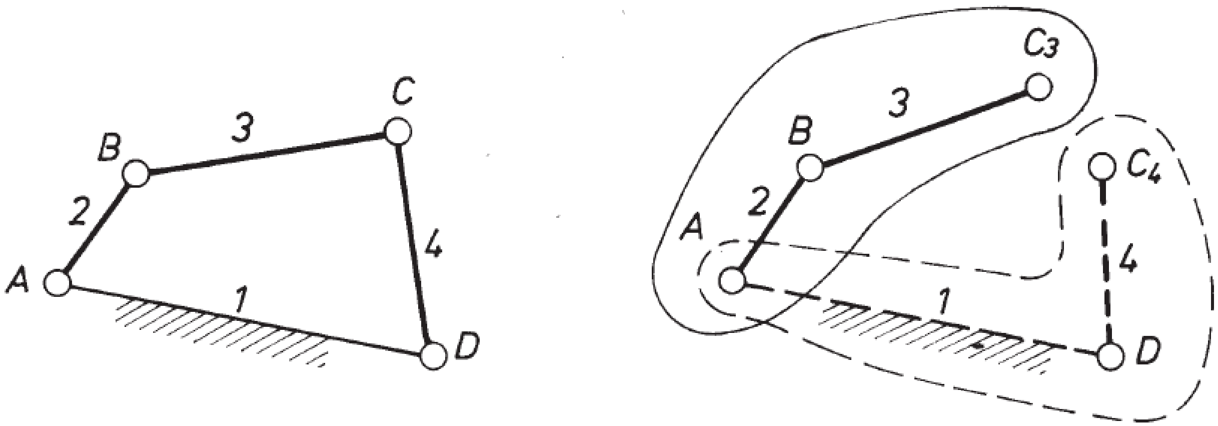
Metody analityczne

Metoda macierzowa

Metody analityczne

Metoda macierzowa

Metoda ta polega na macierzowym zapisie położenia członów względem dowolnie wybranego punktu związanego na stałe z jednym z członów mechanizmu. Stosuje się ją głownie w układach łańcuchów otwartych (manipulatory). Niemniej jednak przy odpowiednim rozdziale łańcucha i właściwym zapisie matematycznym, z powodzeniem można tą metodę stosować w analizie łańcuchów zamkniętych.



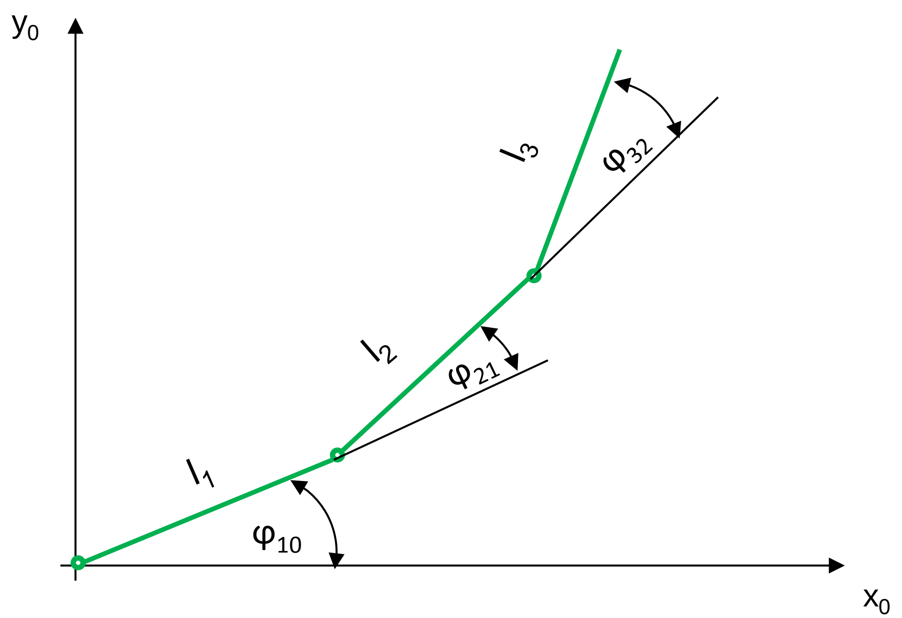
Przykład rozdziału łańcucha zamkniętego na dwa łańcuchy otwarte

Metody analityczne

Metoda macierzowa

Przykład

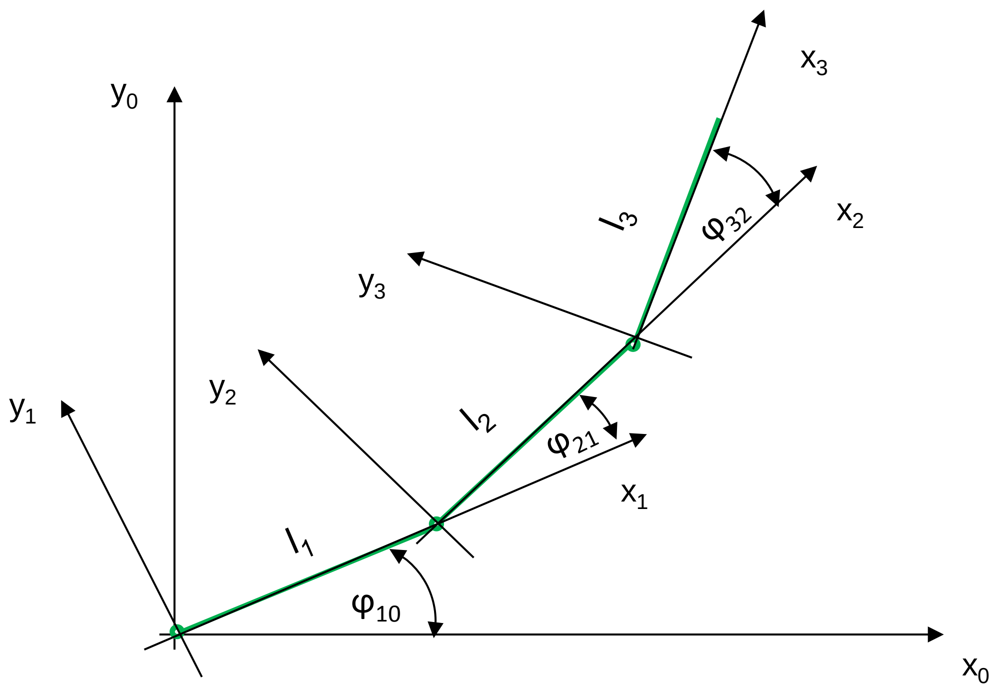
Dany jest łańcuch kinematyczny, dla którego znane są długości poszczególnych członów, l_1, l_2 i l_3 oraz ich chwilowe położenie wyrażone wartościami kątów φ_{10}, φ_{21} i φ_{32}.



Metody analityczne

Metoda macierzowa

Do każdego członu przypisujemy indywidualny układ współrzędnych.

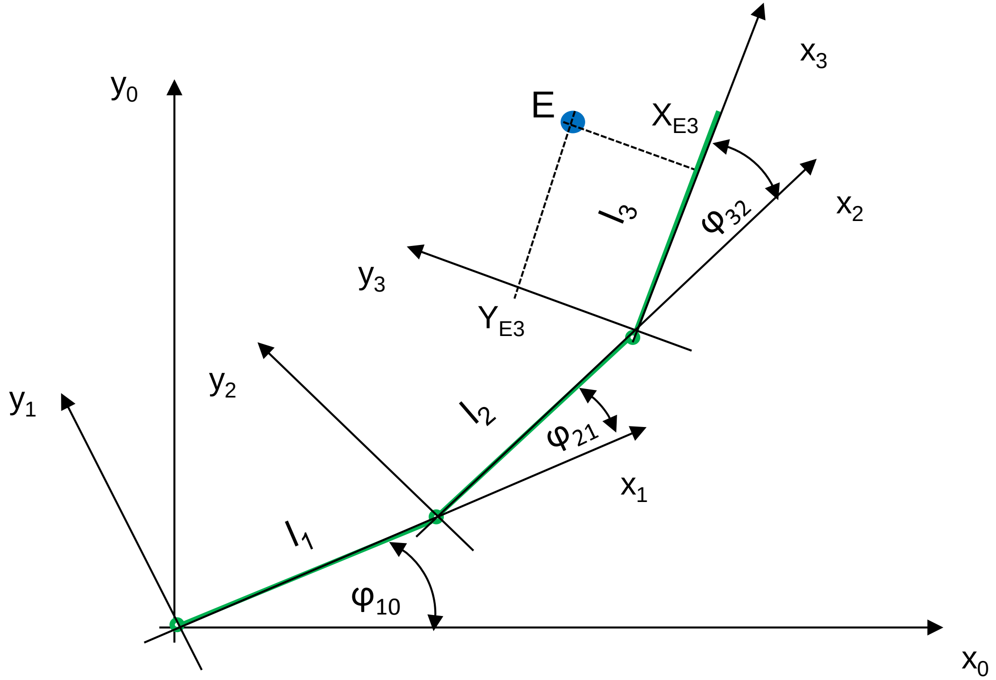


Metody analityczne

Metoda macierzowa

Przyjmujemy, że punkt E jest na stałe związany z członem l_3 i znane jest jego położenie we współrzędnych indywidualnych tego członu X_{E3} , $Y_{E3.}$

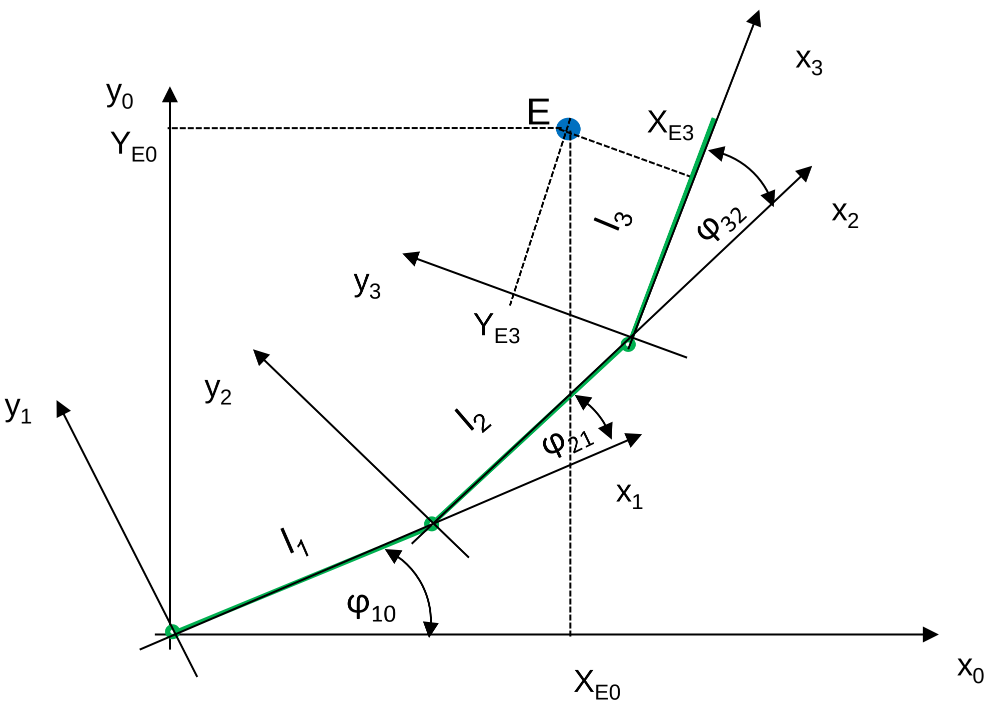
.



Metody analityczne

Metoda macierzowa

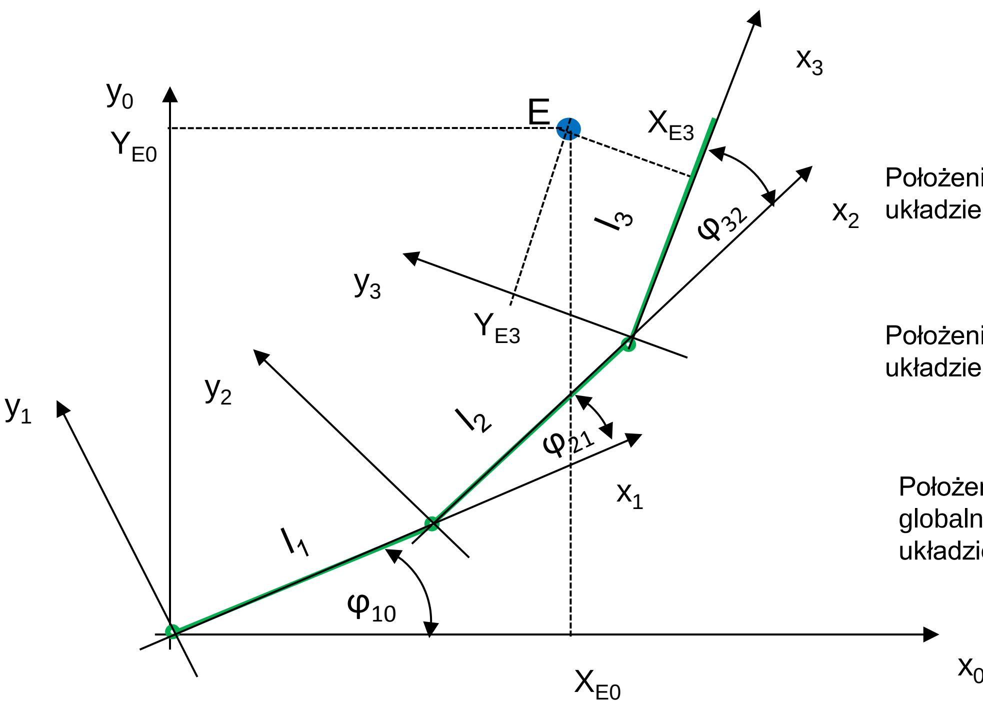
Zaznaczamy chwilowe położenie punktu E względem globalnego układu współrzędnych X_{E0} , $Y_{E0.}$



Metody analityczne

Metoda macierzowa

Następnie opisujemy położenie punktu E w lokalnym układzie współrzędnych członów l_1 i l_2 oraz układzie globalnym.



Położenie w układzie członu 2

$$\begin{cases} x_{E2} = x_{E3}\cos\varphi_{32} - y_{E3}\sin\varphi_{32} + l_2, \\ y_{E2} = x_{E3}\sin\varphi_{32} + y_{E3}\cos\varphi_{32}, \end{cases}$$

Położenie w układzie członu 1

$$\begin{cases} x_{E1} = x_{E2}\cos\varphi_{21} - y_{E2}\sin\varphi_{21} + l_1, \\ y_{E1} = x_{E2}\sin\varphi_{21} + y_{E2}\cos\varphi_{21}, \end{cases}$$

Położenie w globalnym układzie

$$\begin{cases} x_{E0} = x_{E1}\cos\varphi_{10} - y_{E1}\sin\varphi_{10}, \\ y_{E0} = x_{E1}\sin\varphi_{10} + y_{E1}\cos\varphi_{10}, \end{cases}$$

Metody analityczne

Metoda macierzowa

Poszczególne równania przekształcamy do zapisu macierzowego

Położenie w układzie członu 2

$$\begin{cases} x_{E2} = x_{E3}\cos\varphi_{32} - y_{E3}\sin\varphi_{32} + l_2, \\ y_{E2} = x_{E3}\sin\varphi_{32} + y_{E3}\cos\varphi_{32}, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{E2} &= x_{E3}\cos\varphi_{32} - y_{E3}\sin\varphi_{32} + l_2, \\ x_{E2} &= x_{E3}\sin\varphi_{32} + y_{E3}\cos\varphi_{32} + 0, \\ 1 &= 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1. \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & l_2 \\ \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{E3} \\ y_{E3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Położenie w układzie członu 1

$$\begin{cases} x_{E1} = x_{E2}\cos\varphi_{21} - y_{E2}\sin\varphi_{21} + l_1, \\ y_{E1} = x_{E2}\sin\varphi_{21} + y_{E2}\cos\varphi_{21}, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{E1} &= x_{E2}\cos\varphi_{21} - y_{E2}\sin\varphi_{21} + l_1, \\ y_{E1} &= x_{E2}\sin\varphi_{21} + y_{E2}\cos\varphi_{21} \\ 1 &= 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1. \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{E1} \\ y_{E1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & l_1 \\ \sin\varphi_{21} & +\cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Położenie w globalnym układzie

$$\begin{cases} x_{E0} = x_{E1}\cos\varphi_{10} - y_{E1}\sin\varphi_{10}, \\ y_{E0} = x_{E1}\sin\varphi_{10} + y_{E1}\cos\varphi_{10}, \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_{E0} &= x_{E1}\cos\varphi_{10} - y_{E1}\sin\varphi_{10} + 0, \\ y_{E0} &= x_{E1}\sin\varphi_{10} + y_{E1}\cos\varphi_{10} + 0, \\ 1 &= 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1. \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{E0} \\ y_{E0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 \\ \sin\varphi_{10} & +\cos\varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{E1} \\ y_{E1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Metody analityczne

Metoda macierzowa

Po wprowadzeniu poniższego zapisu

$$T_{32} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{32} & -\sin\varphi_{32} & l_2 \\ \sin\varphi_{32} & \cos\varphi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{21} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{21} & -\sin\varphi_{21} & l_1 \\ \sin\varphi_{21} & \cos\varphi_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{10} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{10} & -\sin\varphi_{10} & 0 \\ \sin\varphi_{10} & \cos\varphi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathrm{r}_{E3} = \begin{bmatrix} x_{E3} \\ y_{E3} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{r}_{E2} = \begin{bmatrix} x_{E2} \\ y_{E2} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{r}_{E1} = \begin{bmatrix} x_{E1} \\ y_{E1} \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathrm{r}_{E0} = \begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 1 \end{bmatrix}$$

Metody analityczne

Metoda macierzowa

Otrzymujemy

$$\mathrm{r}_{E2} = \mathrm{T}_{32}\,\mathrm{r}_{E3},$$

$$\mathrm{r}_{E1} = \mathrm{T}_{21}\,\mathrm{r}_{E2},$$

$$\mathrm{r}_{E0} = \mathrm{T}_{10}\,\mathrm{r}_{E1},$$

lub

$$\mathrm{r}_{E0} = \mathrm{T}_{10}\mathrm{T}_{21}\mathrm{T}_{32}\,\mathrm{r}_{E3}.$$

Ostatecznie po wymnożeniu otrzymujemy chwilowe położenie punktu E w globalnym układzie współrzędnych w funkcji położenia pozostałych członów łańcucha.

$$x_{E0} = x_{E3}\cos\varphi_{30} - y_{E3}\sin\varphi_{30} + l_2\cos\varphi_{20} + l_1\cos\varphi_{10},$$

$$y_{E0} = y_{E3}\sin\varphi_{30} - x_{E3}\cos\varphi_{30} + l_2\sin\varphi_{20} + l_1\sin\varphi_{10},$$

gdzie:
$$\varphi_{30} = \varphi_{32} + \varphi_{20},$$
$$\varphi_{20} = \varphi_{21} + \varphi_{10}.$$

Dziękuję za uwagę