

Osie i wały

Janusz Skrzypacz

Pojęcie osi i wału

Oś lub **wałem** nazywa się element maszyny podparty w łożyskach i podtrzymujący osadzone na nim części maszyn. Na wale mogą być osadzone różne elementy wykonujące ruchy obrotowe (np. koła zębate, piasty, tarcze hamulcowe itp.) lub ruchy wahadłowe (np. koło zębate współpracujące z zębatką).

Różnica pomiędzy osią a wałem:

Oś – element obciążony jedynie momentem gnącym

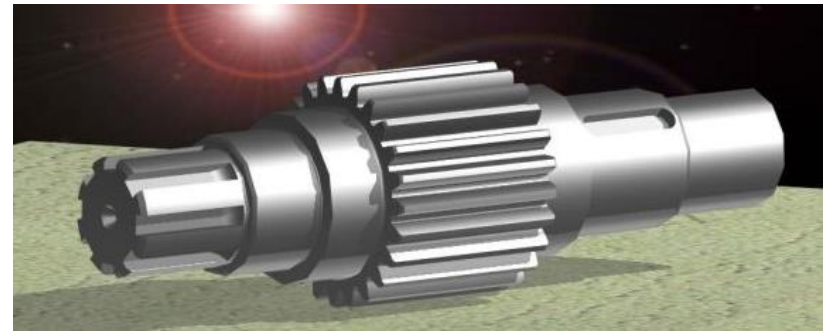
Wał – element, którego głównym zadaniem jest przenoszenie momentu obrotowego

Typy osi i wałów

Gładkie



Stopniowane



Korbowe



Rozrzędu

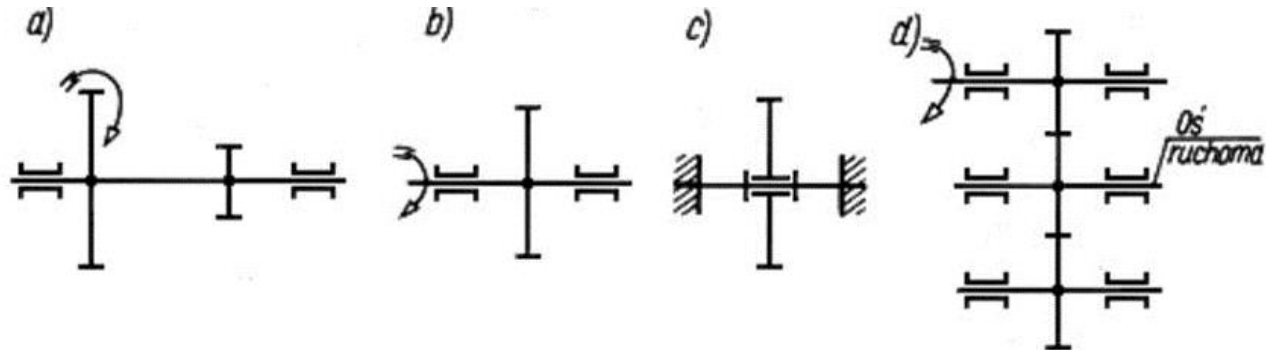


Osie



Stałe – kierunek działania obciążenia jest stały względem osi

Ruchome – obciążenie zmienia kierunek działania



Schematy: a, b) wału, c) osi nieruchomej, d) osi ruchomej

Wały - przykłady



Wał elektrowni ITAIPU

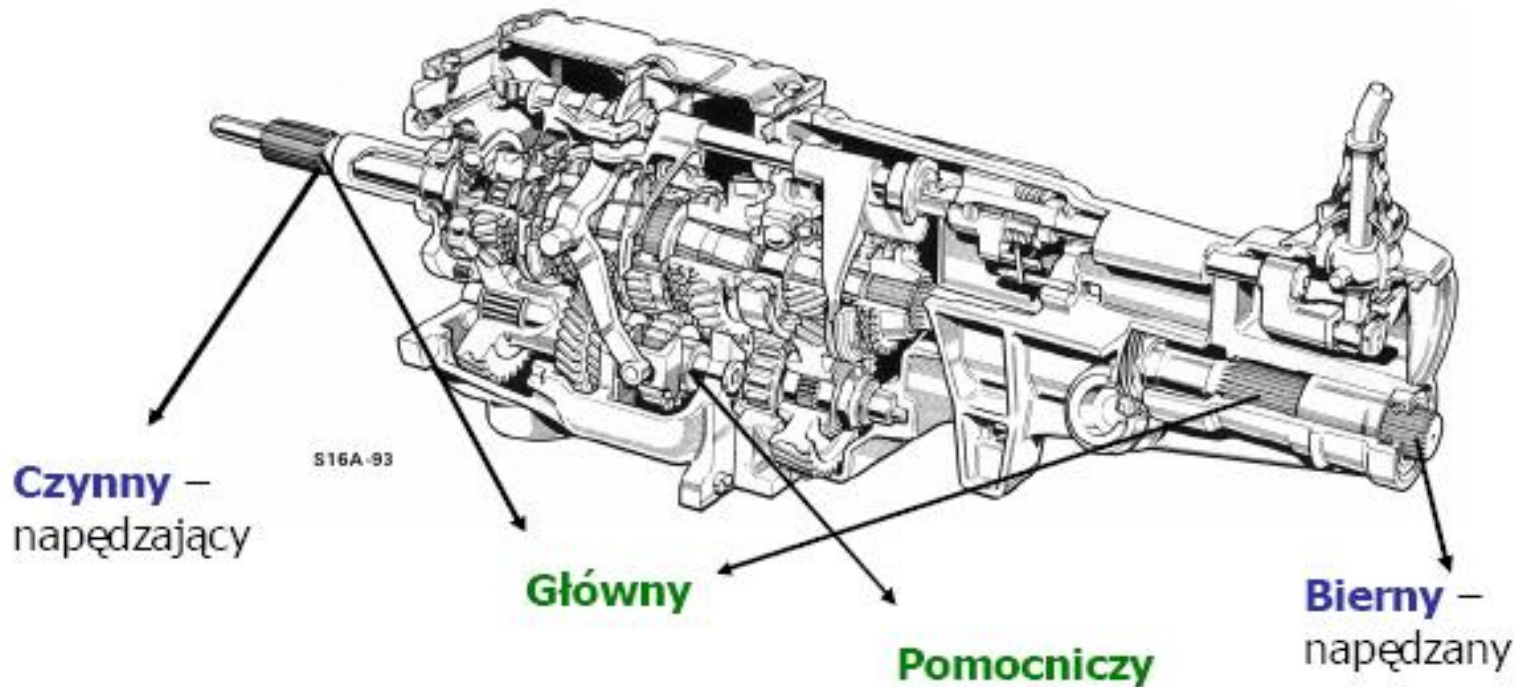


Przykłady wałów

Głównym zadaniem wału jest przenoszenie momentu obrotowego, zatem wał wykonuje zawsze ruch obrotowy. W związku z tym wał jest narażony jednocześnie na skręcanie oraz - pod wpływem sił poprzecznych - na zginanie. W niektórych przypadkach wał może być narażony tylko na skręcanie (np. samochodowy wał napędowy w sprzęgle Cardana).



Przykłady wałów c.d.



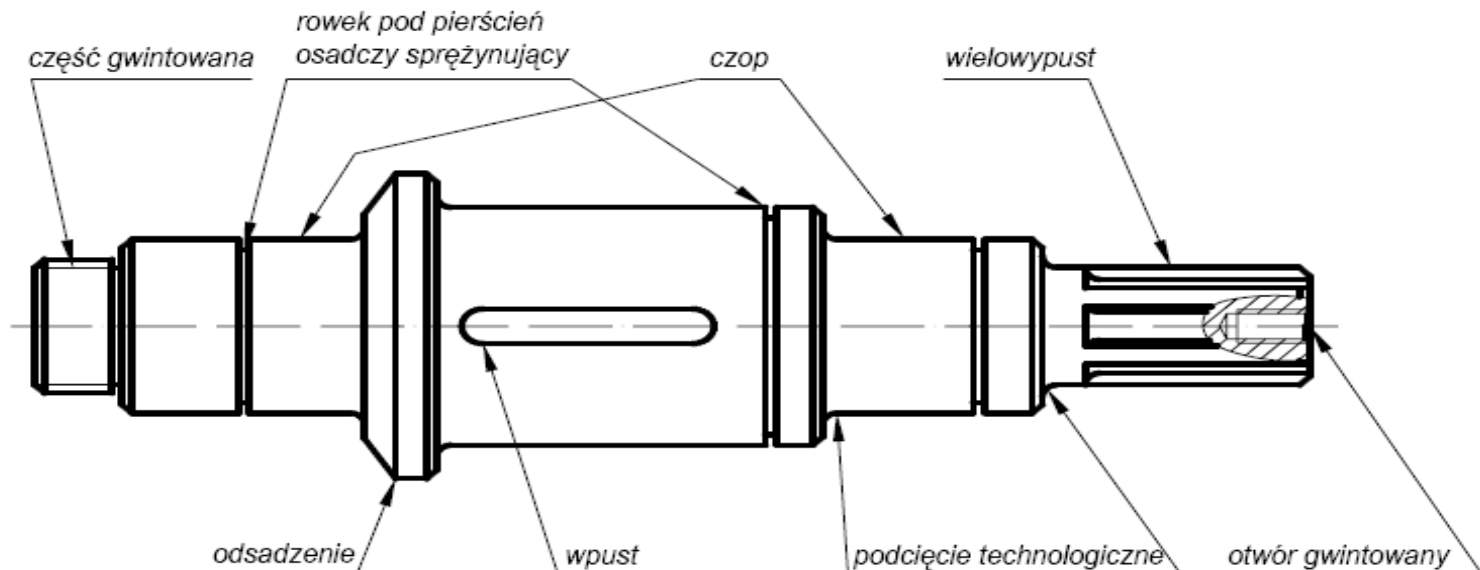
Przykłady wałów c.d.

Wał wykonany z kompozytów



Charakterystyczne powierzchnie wału

Czopami nazywa się odcinki osi lub wału, których powierzchnie stykają się ze współpracującymi elementami: łożyskami, kołami zębatymi itd. Rozróżnia się czopy ruchowe i czopy spoczynkowe. Czopy ruchowe współpracują z panewkami łożysk ślizgowych, z kołami przesuwными lub obracającymi się względem nieruchomej osi itp., natomiast czopy spoczynkowe współpracują z elementami osadzonymi na stałe względem wału i obracającymi się wraz z nim.



Czopy - wymiary

PN/M-85000

Zalecane:

10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80 ...

Dopuszczane:

19, 24, 30, 38, 42, 56, 63, 65, 71, 75

Materiały stosowane na osie i wały

Osie i wały wykonuje się najczęściej ze stali:

- **konstrukcyjnej węglowej zwykłej jakości** (najczęściej E295, E360), gdy elementy są mało obciążone w maszynach mniej ważnych, stosowane bez obróbki cieplnej i gdy bardziej wymagana jest sztywność elementu niż jego wytrzymałość;
- **konstrukcyjnej węglowej wyższej jakości** (najczęściej C25, C35 i C45). Stale C25 i C35 stosuje się w stanie normalizowanym i ulepszonym lub hartowanym powierzchniowo (45), stosowane gdy wyższe obciążenia i temperatura;
- **konstrukcyjnej stopowej do ulepszania cieplnego**, najczęściej chromoniklowej, gdy wymagana jest mała średnica wału (w tym przypadku zalecane jest ulepszanie cieplne) oraz gdy na wale są odkute elementy pracujące jak koła zębate lub połówki sprzęgła, wymagające powierzchni odpornych na ścieranie – duże obciążenia zmienne i udarowe;
- **konstrukcyjnej stopowej do nawęglania lub azotowania** - jak w powyższym punkcie, ale gdy bardziej zależy nam na twardości powierzchni niż na wytrzymałości rdzenia elementu (zawsze nawęglone lub azotowane oraz zawsze hartowane przynajmniej na niektórych powierzchniach) – bardzo duże obciążenia zmienne, udarowe oraz wysokie obroty np wałki wirówek, wałki rozrzędu;
- **konstrukcyjnej stopowej o szczególnych właściwościach**, gdy wymagane są szczególne cechy, jak żaroodporność, nierdzewność, kwasoodporność itp.

W wyjątkowych przypadkach wykonuje się wały odlewane, stalowe lub żeliwne (głównie do wykonania wałów wykorbionych). Najczęściej stosuje się żeliwo modyfikowane lub sferoidalne.

Projektowanie osi i wałów - dane

- Schematy dotyczące wymiarów wałka, wymiary elementów osadzonych na wale oraz ich rozmieszczenie
- Dane dotyczące obciążenia wału ilościowe (siły, momenty, prędkości obrotowe, zmienność wartości) jak i jakościowe (kierunki działania sił, ich zwroty)
- Dane dotyczące oceny sztywności wałka (dopuszczalne ugięcie, typy łożysk, itp.)

Etapy projektowania

- **Etap I – Projektowanie wstępne**
 - Obliczenia reakcji i momentów
 - Wyznaczenie średnic (zarys teoretyczny)
- **Etap II – Obliczenia sprawdzające**
 - Obliczenia sztywności (strzałka ugięcia, kąt ugięcia, kąt skręcenia)
 - Obliczenia dynamiczne (prędkość krytyczna)
 - Obliczenia zmęczeniowe
- **Etap III – Ostateczne ukształtowanie wału**

Etap I

Wały mogą być zginane, skręcane oraz rozciągane (ściskane), zatem niezbędne jest zastosowanie odpowiedniej teorii wytrzymałościowej - Hubera

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_g + \sigma_{r(c)})^2 + (\alpha \cdot \tau_s)^2}$$

Gdy naprężenia normalne są dominujące

$$\tau_z = \sqrt{\left[\frac{1}{\alpha}(\sigma_g + \sigma_{r(c)})\right]^2 + (\tau_s)^2}$$

Gdy naprężenia styczne są dominujące

α – współczynnik redukcyjny (materiał i sposób obciążenia)

Obciążenia tego samego typu:

$$\alpha = \frac{k_g}{k_s} = \frac{k_{go}}{k_{so}} = \frac{k_{gj}}{k_{sj}} \approx \sqrt{3}$$

Obciążenia różnych typów:

$$\alpha = \frac{k_{gj}}{k_{so}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{k_{go}}{k_{sj}} \approx 2 \cdot \sqrt{3}$$

Etap I c.d.

Rozpoczynając obliczenia nie znamy naprężeń, natomiast obciążenia są znane.

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} \leq k_{g(jo)}$$

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o} \leq k_{s(jo)}$$

Dla przekroju kołowego, typowego dla osi i wałów, wskaźniki przekrojów można policzyć:

$$W_o = 2 \cdot W_x = 2 \cdot \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Etap I c.d.

ZATEM

W przypadku przewagi naprężeń normalnych ($M_s < 2M_g$)

$$\sigma_z = \frac{1}{W_x} \sqrt{(M_g)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_s\right)^2} = \frac{M_z}{W_x} \leq k_{go}$$

W przypadku przewagi naprężeń stycznych ($M_s > 2M_g$)

$$\tau_z = \frac{1}{W_o} \sqrt{\left(\frac{2}{\alpha} M_g\right)^2 + (M_s)^2} = \frac{M_z}{W_o} \leq k_s \quad (k_{sj} \quad k_{so})$$

Etap I c.d.

Naprężenia dopuszczalne

$$k = \frac{R_e}{x_e} \quad \text{lub} \quad k = \frac{R_m}{x_m}$$

Material	x_e	x_m	x_z
Stale, staliwa, żeliwa ciągliwe	2÷2,3	-	3,5÷4
Żeliwa szare	-	3,5	3
Stopy miedzi	3÷4	-	4,5÷6
Stopy aluminium	3,5÷4	-	5÷7

Rodzaj obciążenia	Symbol	Stale, staliwa	Żeliwa szare	Stopy miedzi	Stopy aluminium
Rozciąganie i ściskanie	Z_{rj}	$(0,55\div 0,63) R_m$	$\sim 1,5 Z_{rc}$	śr. $0,50 R_m$	śr. $0,48 R_m$
	Z_{rc}	$(0,28\div 0,4) R_m$	śr. $0,7 Z_{go}$	śr. $0,28 R_m$	$0,7 Z_{go} \approx 0,25 R_m$
	Z_{cj}	Z_{rj}	$(3,4\div 4) Z_{rj}$	Z_{rj}	Z_{rj}
Zginanie	Z_{gj}	$(0,66\div 0,75) R_m$	$\sim 1,5 Z_{go}$	$\sim 1,8 Z_{go}$	$\sim 1,8 Z_{go}$
	Z_{go}	śr. $0,45 R_m$	śr. $0,4 R_m$	śr. $0,35 R_m$	śr. $0,34 R_m$
Skręcanie i ścinanie	Z_{sj}	$(0,46\div 0,5) R_m$	$\sim 1,5 Z_{so}$	$\sim 1,7 Z_{so}$	$\sim 1,7 Z_{so}$
	Z_{so}	$(0,22\div 0,25) R_m$	$\sim 0,8 Z_{go}$	$\sim 0,58 Z_{go}$	$\sim 0,56 Z_{go}$

Materiał	Znak stali	Stan obróbki cieplnej	R _m min. MPa	R _e min. MPa	Napężenia dopuszczalne MPa								
					k _r	k _{tj}	k _{rc}	k _g	k _{gj}	k _{go}	k _s	k _{sj}	k _{so}
Stal niestopowa konstrukcyjna zwykłej jakości PN-88/H-84020	St0S		320	195	100	55	30	120	65	40	65	44	23
	St3S		380	235	120	65	35	145	75	50	75	50	27
	St4S		440	275	130	70	40	155	85	55	85	60	30
	St5		490	295	145	80	45	170	95	60	90	65	35
	St6		590	335	160	95	55	195	115	75	105	75	40
	St7		690	365	175	110	60	210	130	85	115	85	45
Stal węglowa konstrukcyjna wyższej jakości PN-75/H-84019	10	N	340	210	105	55	30	125	70	45	65	45	24
	15	N	380	230	115	65	35	140	75	50	75	50	27
	20	N	420	250	125	70	40	150	85	55	80	60	30
	25	N	460	280	140	80	45	170	90	60	90	65	33
	35	N	540	320	155	85	50	185	100	65	100	70	36
	45	N	610	360	170	95	55	205	115	75	110	80	40
	55	N	660	390	185	105	60	225	125	80	120	85	45
	10	H	420	250	125	70	40	150	85	55	80	60	30
	15	H	500	300	150	85	45	180	100	65	95	70	35
	20	H	550	360	180	95	50	215	110	70	115	75	40
	25	T	500	310	150	85	45	180	100	65	95	70	35
	35	T	590	370	180	95	50	215	110	70	115	75	40
	45	T	670	420	200	105	60	240	125	80	130	85	45
	55	T	750	470	225	120	65	270	140	90	145	95	50

$k_c = k_r$; $k_{cj} = k_{tj}$; $k_f \approx k_s$; $k_{tj} \approx k_{sj}$; $k_{to} \approx k_{so}$
 N - normalizowana
 H - nawęglane i hartowane
 T - ulepszone cieplnie (hartowanie i wysokie odpuszczanie)

Etap I c.d.

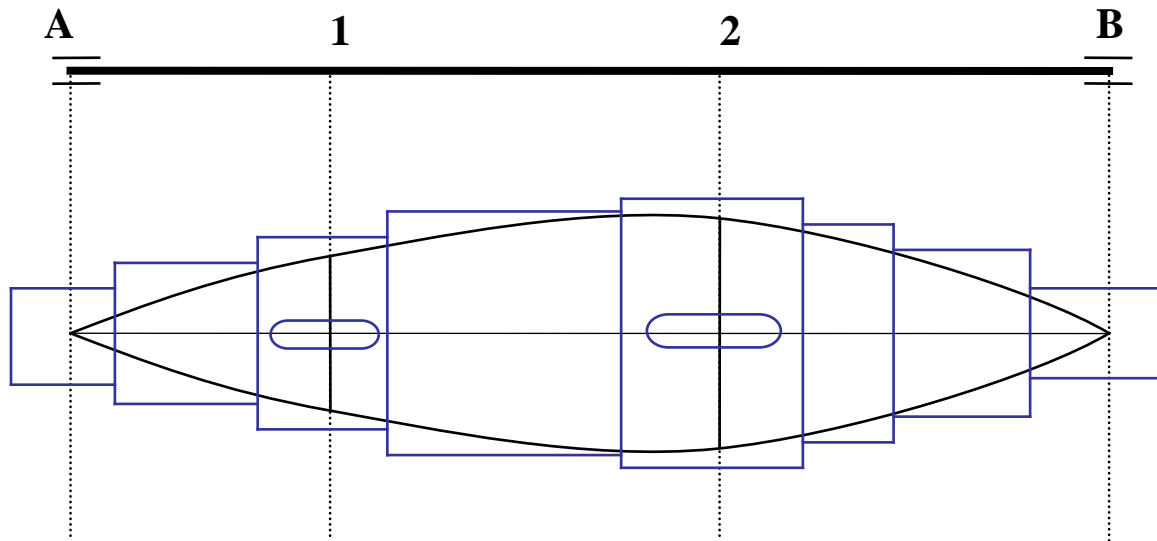
Wyznaczenie średnic wału

W przypadku przewagi
naprężeń normalnych

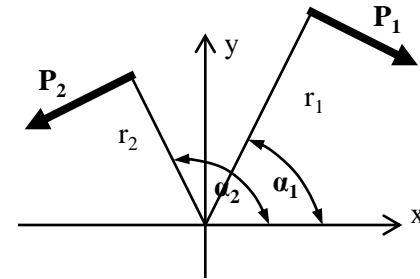
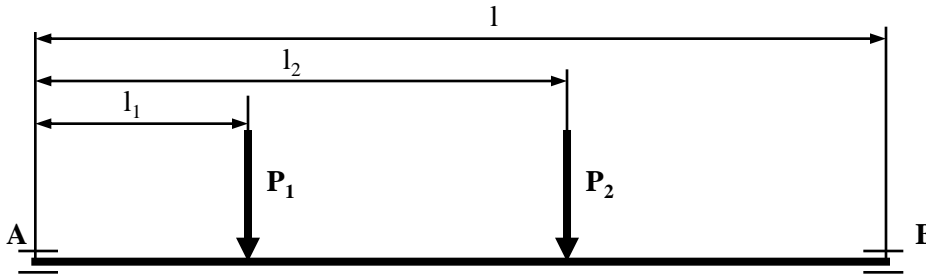
$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{g0}}}$$

W przypadku przewagi
naprężeń stycznych

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot k_s} \leftarrow k_{sj} \quad k_{so}}$$

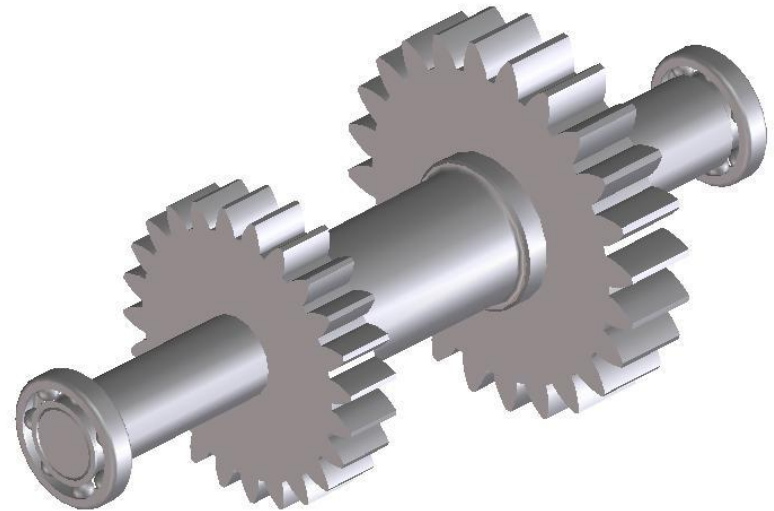


Obliczenia wstępne - przykład



Dane:

$P_1=10000\text{N}$ $r_1=0,08\text{m}$
 $l=0,4\text{m}$ $r_2=0,05\text{m}$
 $l_1=0,1\text{m}$ $\alpha_1=60^\circ$
 $l_2=0,25\text{m}$ $\alpha_2=120^\circ$
stal 45 ulepszana cieplnie
 $Z_{go}=250\text{MPa}$ $Z_{sj}=300\text{MPa}$

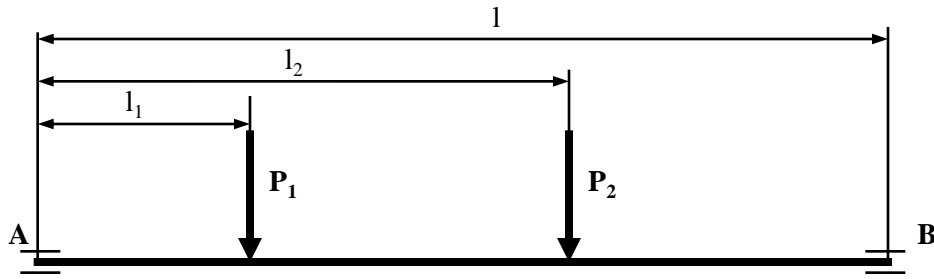


Obliczamy wartości siły P_2 z warunku równowagi momentów:

$$P_1 \cdot r_1 = P_2 \cdot r_2 \Rightarrow P_2 = \frac{P_1 \cdot r_1}{r_2} = \frac{10\text{kN} \cdot 0,08\text{m}}{0,05\text{m}} = 16\text{kN}$$

Obliczenia wstępne - przykład

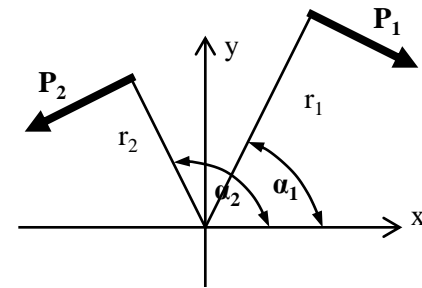
Obliczamy wartości składowych sił w płaszczyznach xz i yz :



płaszczyzna xz



płaszczyzna yz



Dane:

$P_1=10000\text{N}$ $r_1=0,08\text{m}$
 $l=0,4\text{m}$ $r_2=0,05\text{m}$
 $l_1=0,1\text{m}$ $\alpha_1=60^\circ$
 $l_2=0,25\text{m}$ $\alpha_2=120^\circ$
stal 45 ulepszana cieplnie
 $Z_{go}=250\text{MPa}$ $Z_{sj}=300\text{MPa}$

$$P_{1x} = P_1 \cdot \sin 60^\circ = 10\text{kN} \cdot 0,8660 = 8,66\text{kN}$$

$$P_{2x} = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 16\text{kN} \cdot 0,8660 = 13,856\text{kN}$$

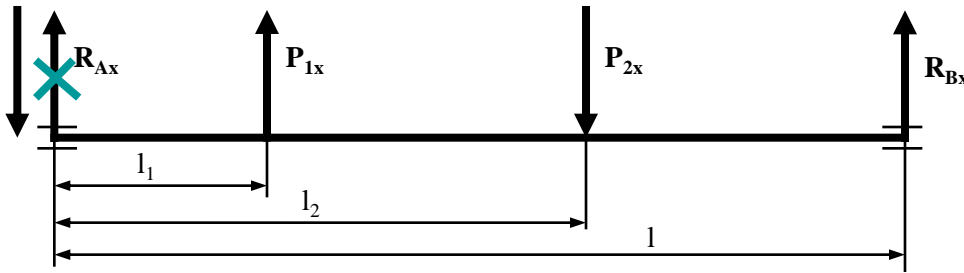
$$P_{1y} = P_1 \cdot \cos 60^\circ = 10\text{kN} \cdot 0,5 = 5\text{kN}$$

$$P_{2y} = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 16\text{kN} \cdot 0,5 = 8\text{kN}$$

Obliczenia wstępne - przykład

Obliczamy wartości reakcji z warunków równowagi sił w kierunku x i y, oraz z warunków równowagi momentów względem łożysk:

płaszczyzna xz



$$\sum P_{ix} = 0 \quad R_{Ax} + P_{1x} - P_{2x} + R_{Bx} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ax} = -P_{1x} + P_{2x} - R_{Bx}$$

$$\sum M_{ixA} = 0 \quad P_{1x} \cdot l_1 - P_{2x} \cdot l_2 + R_{Bx} \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Bx} = \frac{-P_{1x} \cdot l_1 + P_{2x} \cdot l_2}{l}$$

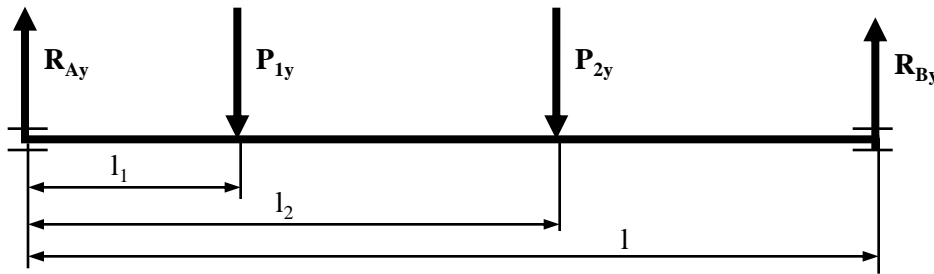
$$R_{Bx} = \frac{-8,66kN \cdot 0,1m + 13,856kN \cdot 0,25m}{0,4m} = 6,495kN$$

$$R_{Ax} = -8,66kN + 13,856kN - 6,495kN = -1,299kN$$

Ujemna wartość reakcji R_{Ax} oznacza błędnie założony zwrot. Należy więc go skorygować.

Obliczenia wstępne - przykład

płaszczyzna yz



$$\sum P_{iy} = 0 \quad R_{Ay} - P_{1y} - P_{2y} + R_{By} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{Ay} = P_{1y} + P_{2y} - R_{By}$$

$$\sum M_{iyA} = 0 \quad -P_{1y} \cdot l_1 - P_{2y} \cdot l_2 + R_{By} \cdot l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{By} = \frac{-P_{1y} \cdot l_1 + P_{2y} \cdot l_2}{l}$$

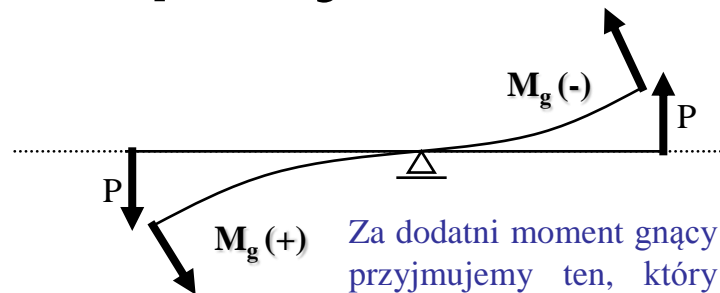
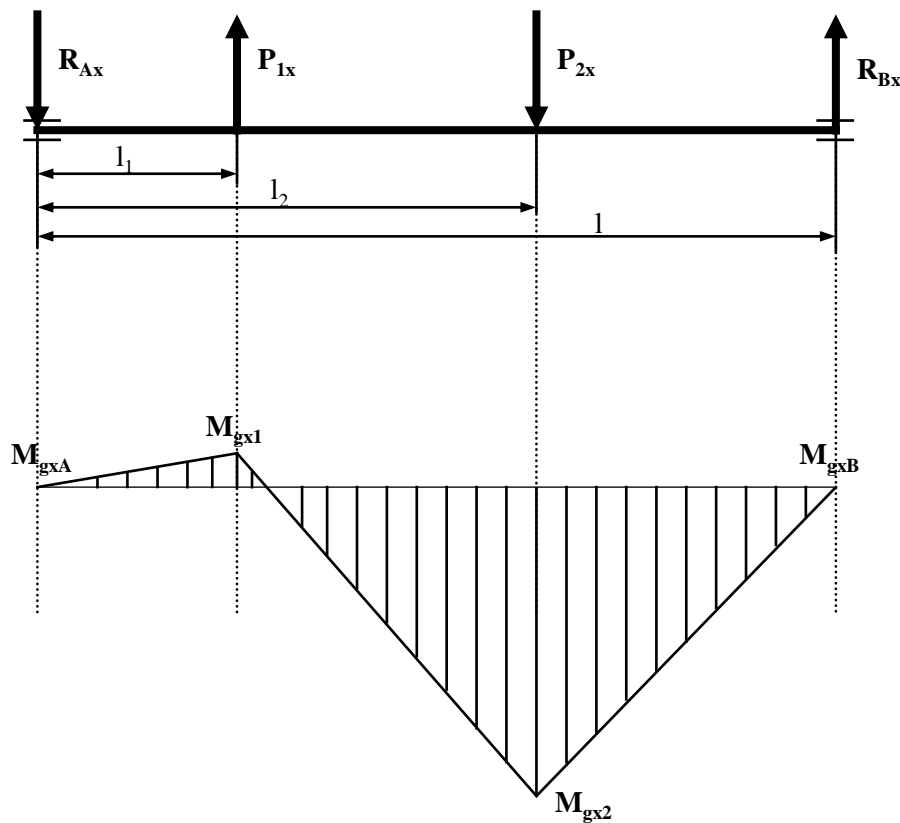
$$R_{By} = \frac{5\text{kN} \cdot 0,1\text{m} + 8\text{kN} \cdot 0,25\text{m}}{0,4\text{m}} = 6,25\text{kN}$$

$$R_{Ay} = 5\text{kN} + 8\text{kN} - 6,25\text{kN} = 6,75\text{kN}$$

Obliczenia wstępne - przykład

Obliczamy wartości momentów gnących w płaszczyznach xz i yz.

płaszczyzna xz



Za dodatni moment gnący przyjmujemy ten, który powoduje ugięcie wału ku dołowi.

$$M_{gxA} = 0$$

$$M_{gx1} = R_{Ax} \cdot l_1 = 1.299 \text{ kN} \cdot 0,1 \text{ m} = 129,9 \text{ Nm}$$

$$\begin{aligned} M_{gx2} &= R_{Ax} \cdot l_2 - P_{1x} \cdot (l_2 - l_1) = \\ &= 1,299 \text{ kN} \cdot 0,25 \text{ m} - 8,66 \text{ kN} \cdot (0,25 \text{ m} - 0,1 \text{ m}) = \\ &= -974,25 \text{ Nm} \end{aligned}$$

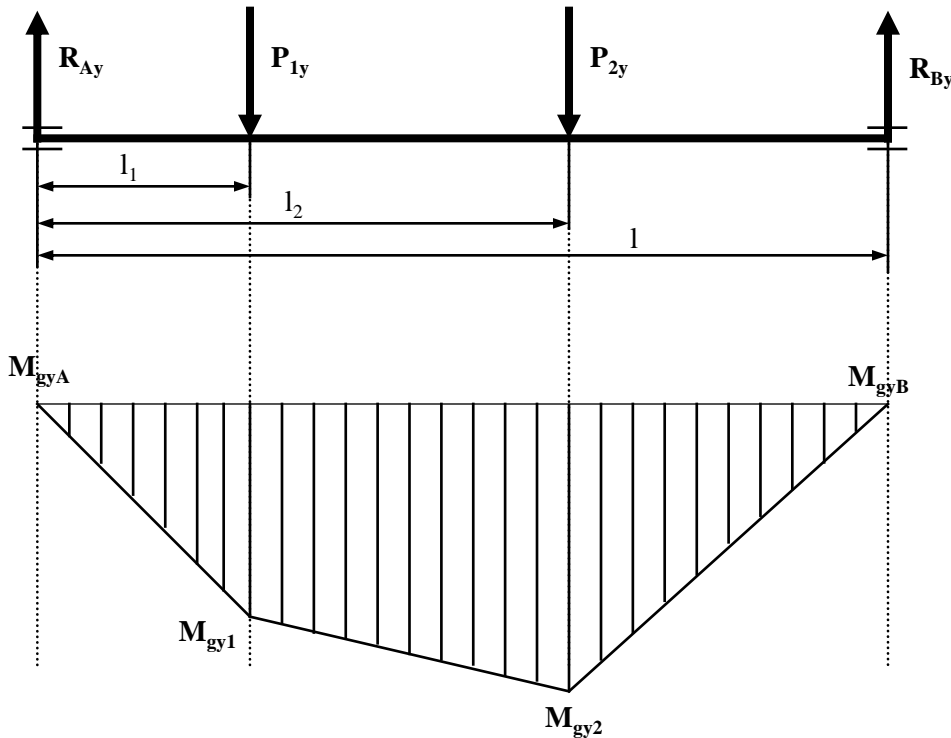
lub

$$\begin{aligned} M_{gx2} &= -R_{Bx} \cdot (l - l_2) = \\ &= 6,495 \text{ kN} \cdot (0,4 \text{ m} - 0,25 \text{ m}) = -974,25 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$$M_{gxB} = 0$$

Obliczenia wstępne - przykład

plaszczyna yz



$$M_{gyA} = 0$$

$$M_{gy1} = -R_{Ay} \cdot l_1 = -6,75\text{kN} \cdot 0,1\text{m} = -675\text{Nm}$$

$$\begin{aligned} M_{gy2} &= -R_{Ay} \cdot l_2 + P_{1y} \cdot (l_2 - l_1) = \\ &= -6,75\text{kN} \cdot 0,25\text{m} + 5\text{kN} \cdot (0,25\text{m} - 0,1\text{m}) = \\ &= -937,5\text{Nm} \end{aligned}$$

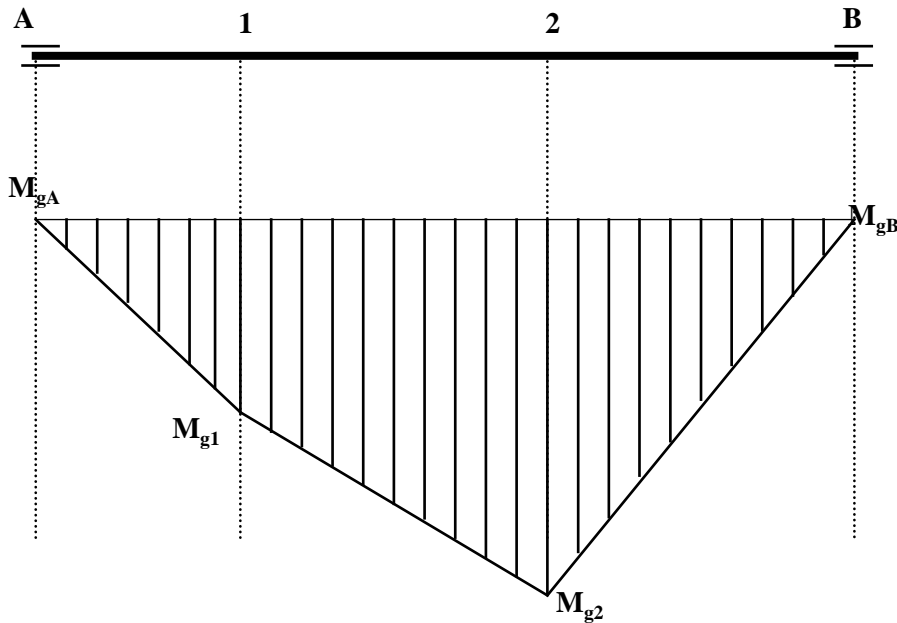
lub

$$\begin{aligned} M_{gy2} &= -R_{By} \cdot (l - l_2) = \\ &= -6,25\text{kN} \cdot (0,4\text{m} - 0,25\text{m}) = -937,5\text{Nm} \end{aligned}$$

$$M_{gyB} = 0$$

Obliczenia wstępne - przykład

Obliczamy wartości momentów gnących wypadkowych



$$M_{gA} = 0$$

$$M_{g1} = \sqrt{M_{gx1}^2 + M_{gy1}^2} = \\ = \sqrt{(129,9Nm)^2 + (-675Nm)^2} = 687,385Nm$$

$$M_{g2} = \sqrt{M_{gx2}^2 + M_{gy2}^2} = \\ = \sqrt{(-974,25Nm)^2 + (-937,5Nm)^2} = \\ = 1352,061Nm$$

$$M_{gB} = 0$$

Obliczenia wstępne - przykład

Obliczamy moment skręcający, który działa pomiędzy przekrojem 1 i 2

$$M_s = P_1 \cdot r_1 = P_2 \cdot r_2 = 10 \text{ kN} \cdot 0,08 \text{ m} = 800 \text{ Nm}$$

Wyznaczamy moment zastępczy zakładając obustronne zginanie wału i jednostronne zmienne skręcanie.

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + (\alpha \tau_s)^2}$$

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x}$$

gdzie

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

$$\tau_s = \frac{M_s}{W_o}$$

gdzie

$$W_o = \frac{\pi d^3}{16}$$

$$\Rightarrow W_x = 2W_o$$

zatem

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W_x}\right)^2 + \left(\alpha \frac{M_s}{2W_x}\right)^2} = \frac{1}{W_x} \sqrt{M_g^2 + \left(\frac{\alpha}{2} M_s\right)^2}$$

i

$$M_z = \sqrt{M_g^2 + \left(\frac{\alpha}{2} M_s\right)^2}$$

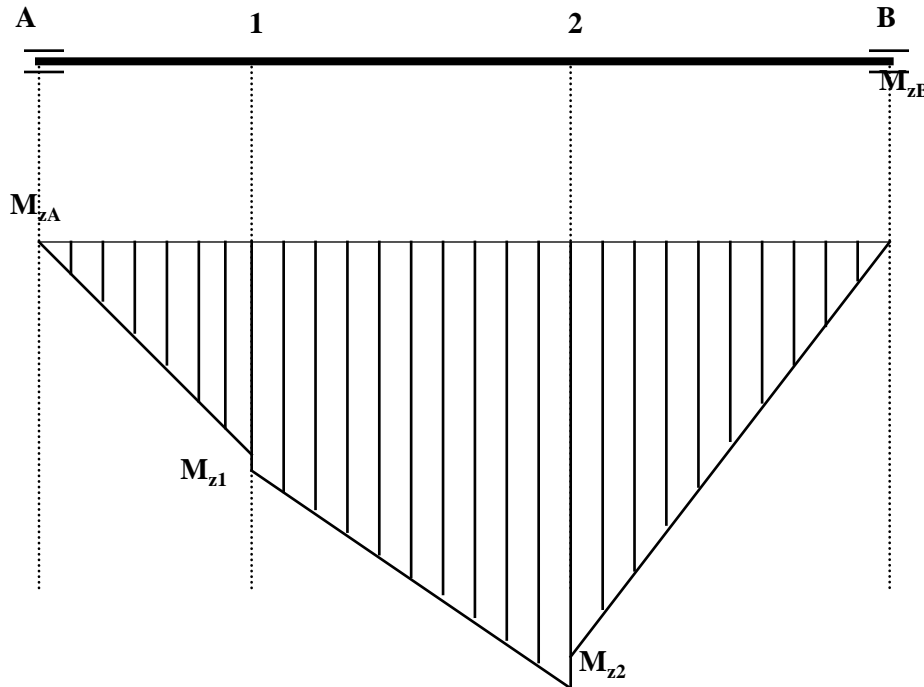
Obliczenia wstępne - przykład

Dla tego typu zmienności obciążenia wartość współczynnika redukcyjnego α wynosi:

$$\alpha = \frac{k_{go}}{k_{sj}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

zatem:

$$M_{zi} = \sqrt{M_{gi}^2 + \frac{3}{16} M_s^2}$$



$$M_{zA} = 0$$

$$M_{z1} = \sqrt{(687,385Nm)^2 + \frac{3}{16} (800Nm)^2} = 769,75Nm$$

$$M_{z2} = \sqrt{(1352,061Nm)^2 + \frac{3}{16} (800Nm)^2} = 1395,73Nm$$

$$M_{zB} = 0$$

Obliczenia wstępne - przykład

W przypadku, gdy dominuje zginanie mamy warunek:

$$\sigma_{red} = \frac{M_z}{W_x} \leq k_{go}$$

Dopuszczalne naprężenia przy obustronnie zmiennym zginaniu przyjmujemy przy założonym współczynniku bezpieczeństwa $x=4$ wynoszą:

$$k_{go} = \frac{Z_{go}}{x} = \frac{250MPa}{4} = 62,5MPa$$

Dla przekroju okrągłego wału mamy:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy wzór na średnicę wału:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32M_z}{\pi k_{go}}}$$

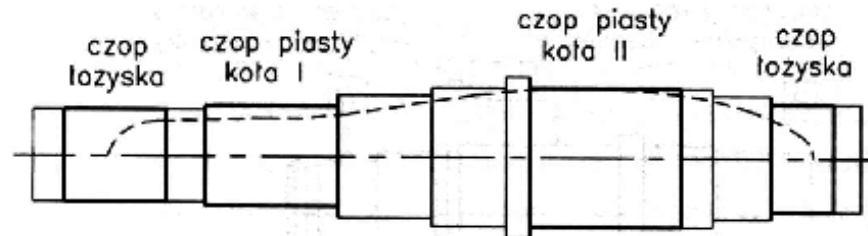
Obliczenia wstępne - przykład

Obliczenia średnic teoretycznych wału

$$d_A \geq 0 \quad d_B \geq 0$$

$$d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 769,75 Nm}{\pi \cdot 62,5 MPa}} = 0,05060 m = 50,6 mm$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1395,73 Nm}{\pi \cdot 62,5 MPa}} = 0,08496 m = 84,96 mm$$



Etap II – Sztywność wału

Strzałka ugięcia i kąt skręcenia

Równanie linii ugięcia belki

$$y'' = \frac{M_g(x)}{EJ}$$

Kąt ugięcia

$$y' = \frac{1}{EJ} \int M_g(x) dx + C$$

Strzałka ugięcia

$$y = \frac{1}{EJ} \int \left[\int M_g(x) dx + C \right] dx + D$$

Etap II – Sztywność wału

Wyznaczenie stałych całkowania

- Podpora przegubowa lub przesuwana – w miejscu podpory zakłada się zerowe przemieszczenie ($y=0$)
- Wspornik – zerowe przemieszczenie oraz zerowy kąt obrotu ($y=0$ oraz $y'=0$)
- W miejscu maksymalnego ugięcia, kąt ugięcia jest równy zero ($y'=0$)
- Koniec swobodny – zerowy moment gnący ($y'' = 0$)

Etap II – Sztywność wału

Dopuszczalne wartości strzałek ugięcia:

$$f_{\text{dop}} = (0.0002 \div 0.0003)l$$

$$f_{\text{dop}} = (0.005 \div 0.01)m$$

Dopuszczalny kąt ugięcia β przyjmuje się w granicach od 0,0003 rad dla łożysk ślizgowych do 0,05 rad dla łożysk wahlowych (ślizgowych lub tocznych).

Rodzaje łożysk	Dopuszczalny kąt ugięcia w rad
Kulkowe wahlowe	0,07
Baryłkowe jednorzędowe	0,035 ÷ 0,07
Kulkowe zwykłe, jeśli pasowanie jest K5/h6	
a) luz poprzeczny normalny	0,0023
b) luz poprzeczny C3	0,0035
c) luz poprzeczny C4	0,0047
Walczkowe i stożkowe	
a) łożyska walczkowe typów N i NU serii 10, 2, 3, 4	0,00116
b) pozostałe	0,00058

Etap II – Sztywność wału

$$\varphi = \frac{M_s l}{G J_o}$$

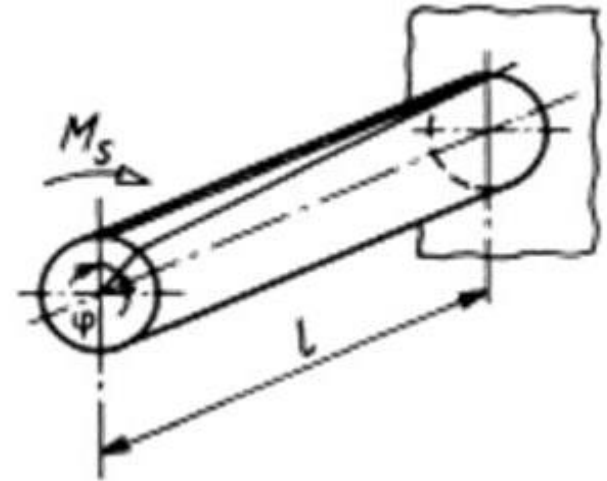
gdzie:

M_s – moment skręcający,

G – moduł sprężystości poprzecznej (dla stali $G=80\ 000 - 85\ 000$ MPa),

J_o – biegunowy moment bezwładności przekroju,

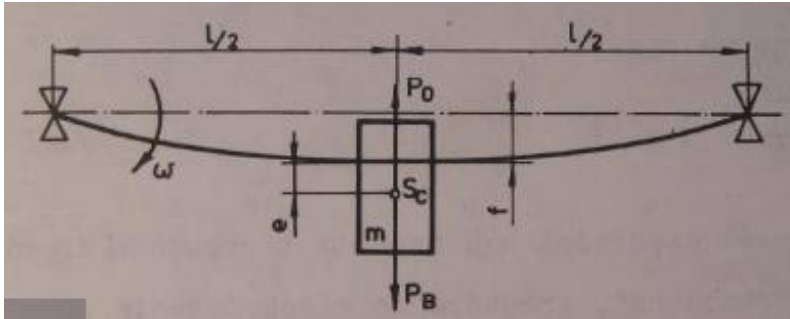
l – długość wału



Wartość dopuszczalnego kąta skręcenia φ_{dop} zależy od funkcji wału w maszynie. Dla wałów maszynowych najczęściej przyjmuje się $\varphi \leq 0,25^\circ$, tj.

$\varphi \leq 0,0044$ rad na 1 m długości wału. W przypadku wałków skrętnych, służących m.in. do łagodzenia nierównomierności momentu obrotowego, dopuszcza się $\varphi \leq 11^\circ$ i więcej (np. dla wałka w sprzęgle Cardana, półosi samochodowych itp.).

Etap II - drgania



$$m \omega^2 (f + e) = c \cdot f$$

Sila
odśrodkowa

Sila
sprężystości

$$f = \frac{m \omega^2 e}{c - m \omega^2}$$

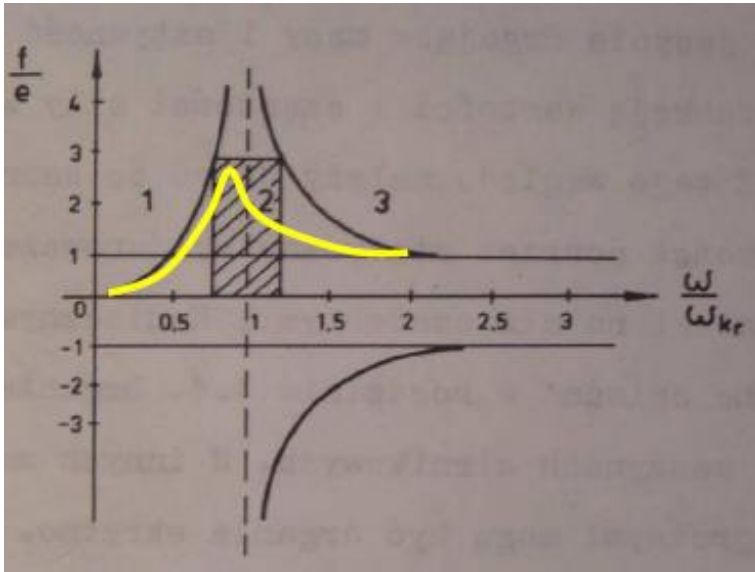
Dla $f = \infty \Rightarrow \omega = \omega_{kr}$

$f = \infty$ gdy $c - m \omega^2 = 0_r$

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Etap II - drgania

$$\frac{f}{e} = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2} - 1} = \frac{1}{\omega_{kr}^2 \cdot \frac{1}{\omega^2} - 1} = \frac{\omega^2}{\omega_{kr}^2 - \omega^2}$$



Zakres pracy

$$0.85\omega_{kr} \geq \omega \geq 1.25\omega_{kr}$$

Wały

podkrytyczne

Wały

nadkrytyczne

Etap II - drgania

Metody inżynierskie szacowania prędkości krytycznej

$$Q = mg$$

Ciężar wału i elementów na nim osadzonych

$$P_s = cf_{stat}$$

Ugięcie wału pod wpływem siły Q

$$mg = cf_{stat}$$

$$\frac{c}{m} = \frac{g}{f_{stat}} = \omega_{kr}^2$$

$$\omega_{kr}^2 = \sqrt{\frac{g}{f_{stat}}}$$

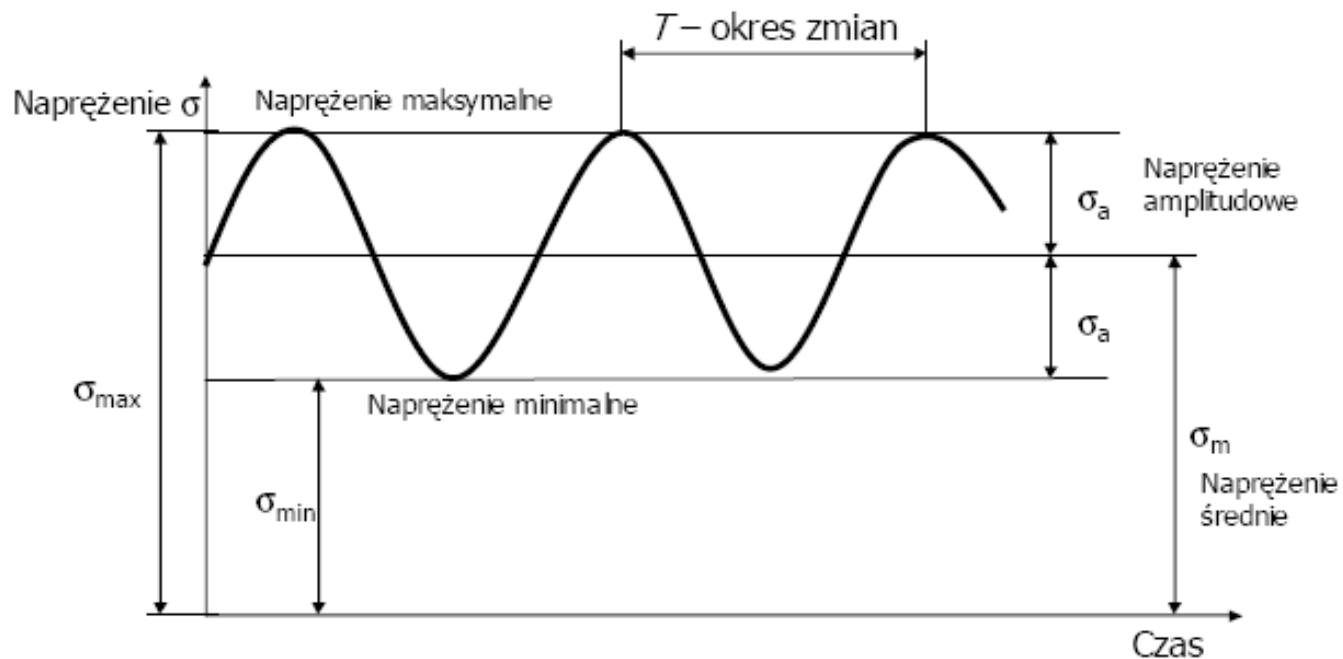
W przypadku skręcania

$$\omega_{kr}^2 = \sqrt{\frac{c_s}{\Theta}}$$

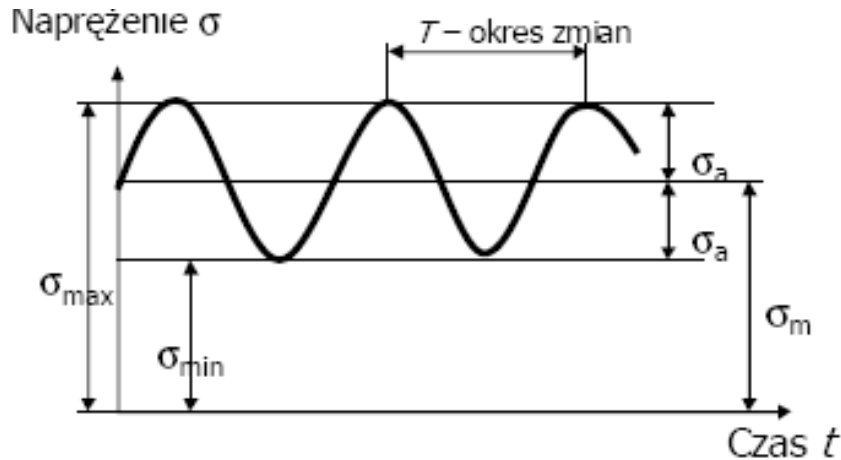
$$c_s = \frac{J_o G}{L}$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Jeśli wartość, kierunek lub zwrot obciążenia ulega zmianie w czasie to mamy do czynienia



ETAP II – obliczenia zmęczeniowe



$$\sigma(t) = \sigma_m + \sigma_a \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik
amplitudy cyklu

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

Współczynnik stałości
obciążenia

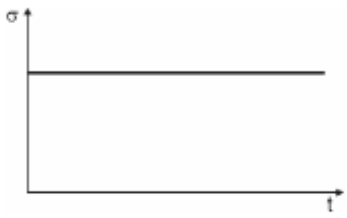
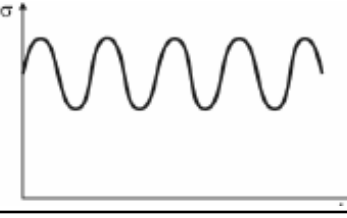
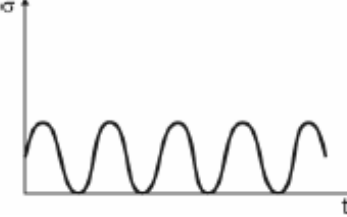
$$K = \frac{\sigma_m}{\sigma_a}$$

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_m - \sigma_a}{\sigma_m + \sigma_a} = \frac{\frac{\sigma_m}{\sigma_a} - 1}{\frac{\sigma_m}{\sigma_a} + 1} = \frac{K - 1}{K + 1}$$

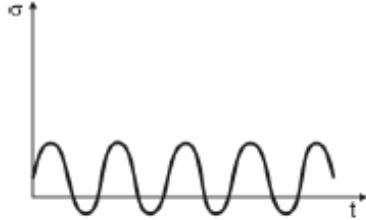



$$K = \frac{\sigma_m}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}} = \frac{1 + \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}}{1 - \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}} = \frac{1 + R}{1 - R}$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Rodzaj cyklu	Schemat	Naprężenia	Współczynniki
Stałe		$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m > 0$ $\sigma_a = 0$	$R = +1$ $K = +\infty$
Jednostronne		$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \sigma_m > 0$ $\sigma_a > 0$	$0 < R < 1$ $1 < K < +\infty$
Odzerowotężniace		$\sigma_{\max} > 0 \quad \sigma_{\min} < 0$ $\sigma_a > 0 \quad \sigma_m > 0$	$R = 0$ $K = 1$

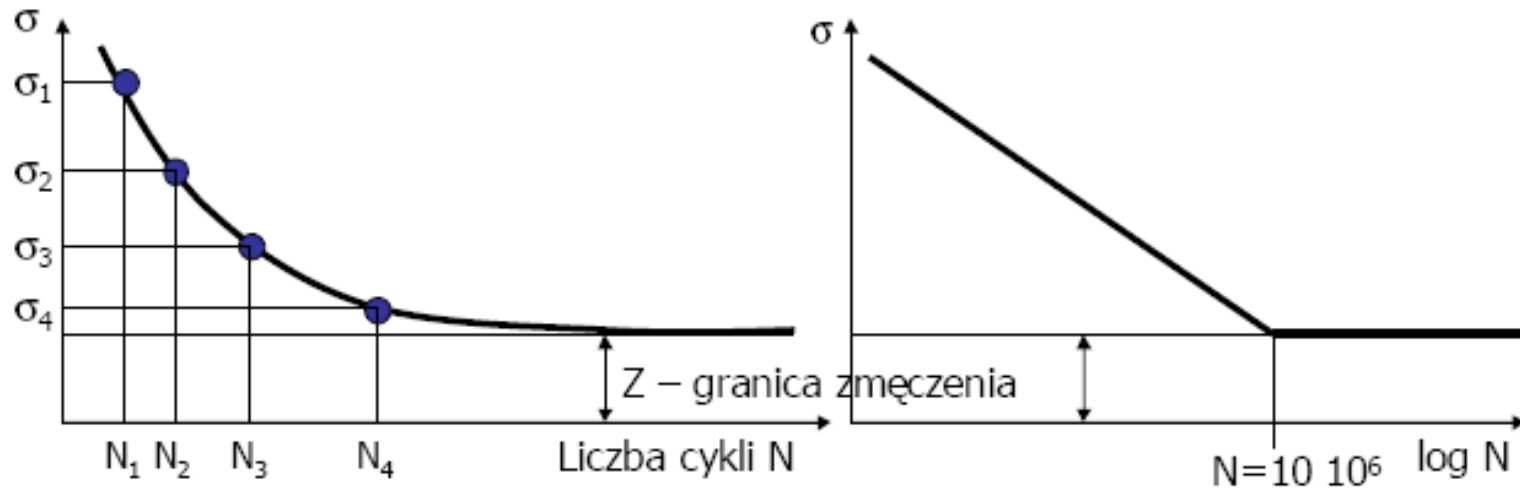
ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Rodzaj cyklu	Schemat	Naprężenia	Współczynniki
Dwustronne	 A graph showing a sinusoidal stress wave oscillating above and below a horizontal mean line. The vertical axis is labeled σ and the horizontal axis is labeled t .	$\sigma_{\max} > 0 \quad \sigma_{\min} < 0$ $\sigma_a > 0 \quad \sigma_m > 0$	$-1 < R < 0$ $0 < K < 1$
Wahadłowe	 A graph showing a sinusoidal stress wave oscillating symmetrically about a horizontal mean line. The vertical axis is labeled σ and the horizontal axis is labeled t .	$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$ $\sigma_m = 0 \quad \sigma_a = \sigma_{\max}$	$R = -1$ $K = 0$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

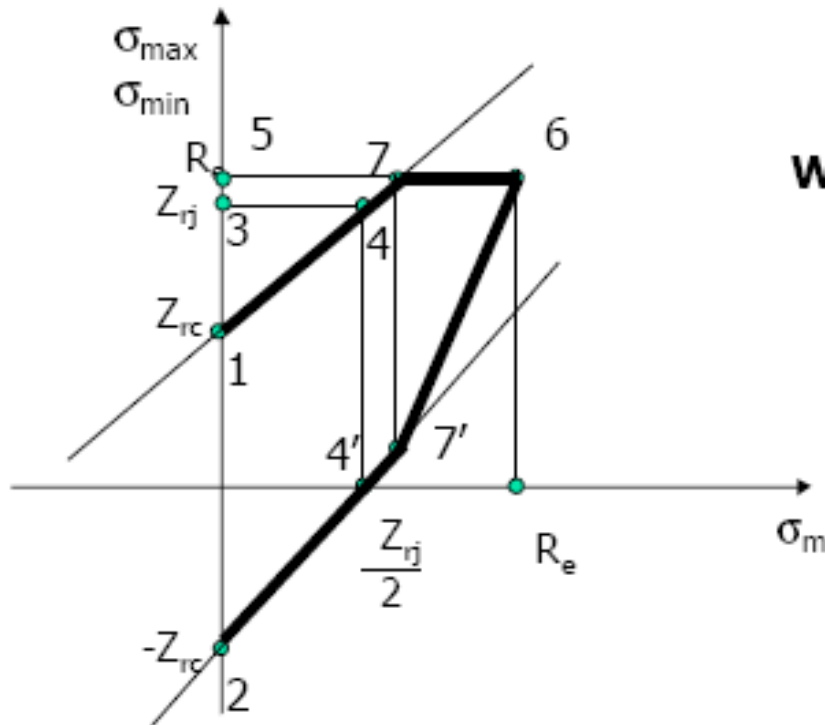
Wytrzymałość zmęczeniowa Z – to takie naprężenie S_{max} dla danego cyklu naprężeń, określonego przez R , że element nie ulega zniszczeniu po osiągnięciu umownej granicznej liczby cykli N , nazywanej podstawą próby zmęczeniowej

Wykres Wöhlera



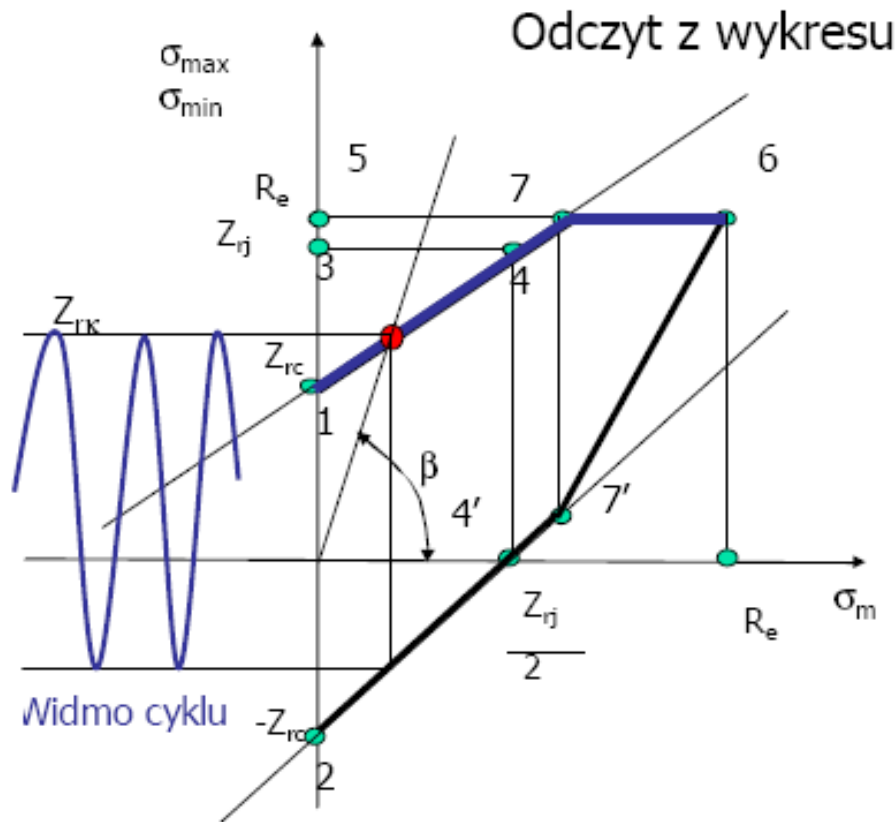
ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Uproszczony wykres Smitha



**Wykres zawsze łączy punkty
1, 7, 6, 7', 2**

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

Współczynnik amplitudy cyklu

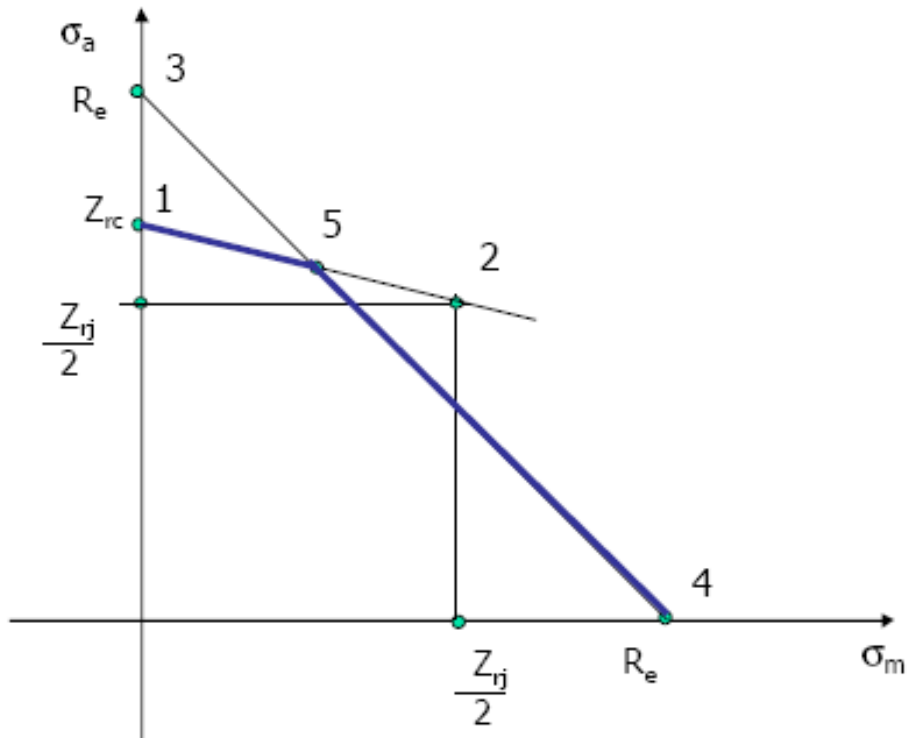
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max}}{\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2 \cdot \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}}}{\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} + \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}} = \frac{2}{1 + R}$$

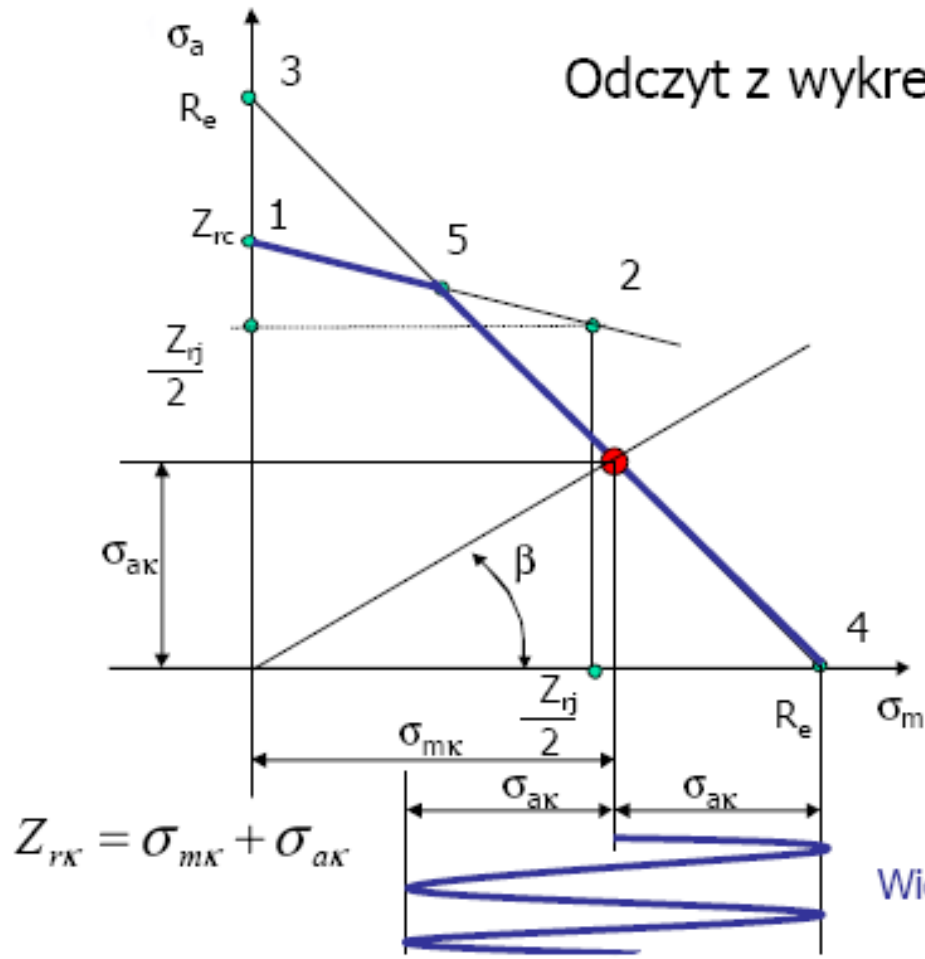
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Wykres Haigha - uproszczony



ETAP II – obliczenia zmęczeniowe



$$tg\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

Współczynnik amplitudy cyklu

$$tg\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{\frac{1}{2}(\sigma_{max} + \sigma_{min})}$$

$$tg\beta = \frac{1 - \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}}{1 + \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

Widmo cyklu

$$tg\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}$$

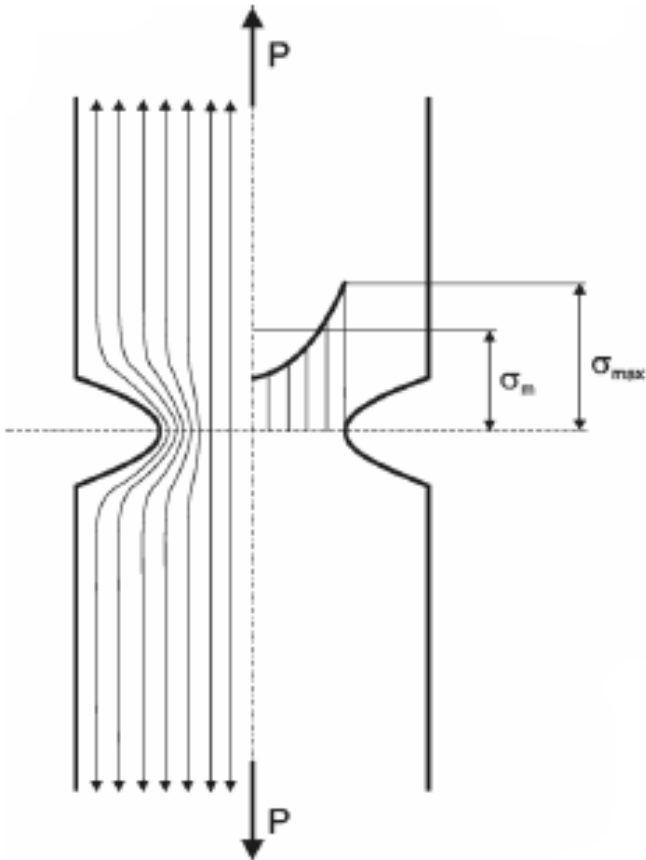
ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Czynniki wpływające na wytrzymałość zmęczeniową:

- Materiał elementu
- Charakter zmian obciążenia
- Kształt przedmiotu
- Stan powierzchni
- Wielkość przedmiotu
- Środowisko pracy
- Temperatura pracy

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Kształt przedmiotu - KARB

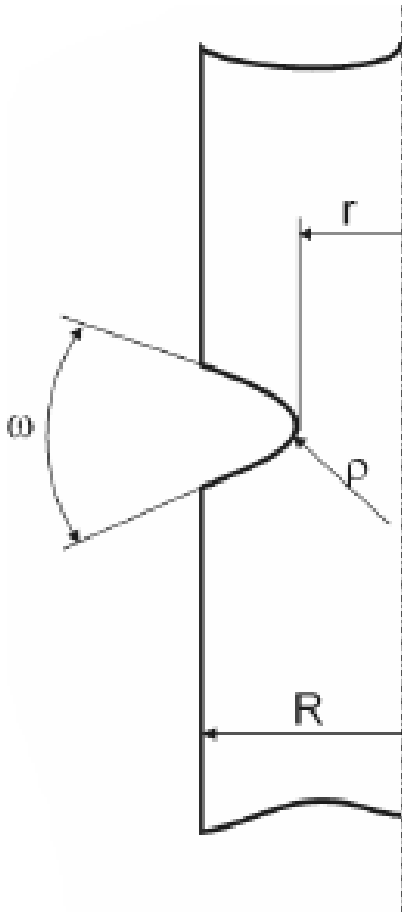


Karb – miejsce zmian poprzecznych przekrojów elementów lub zmian krzywizny powierzchni ograniczających przedmiot:

- odsadzenia,
- rowki,
- wycięcia,
- gwinty,
- otwory,
- itp.

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Kształt przedmiotu - KARB



Współczynnik kształtu
karbu

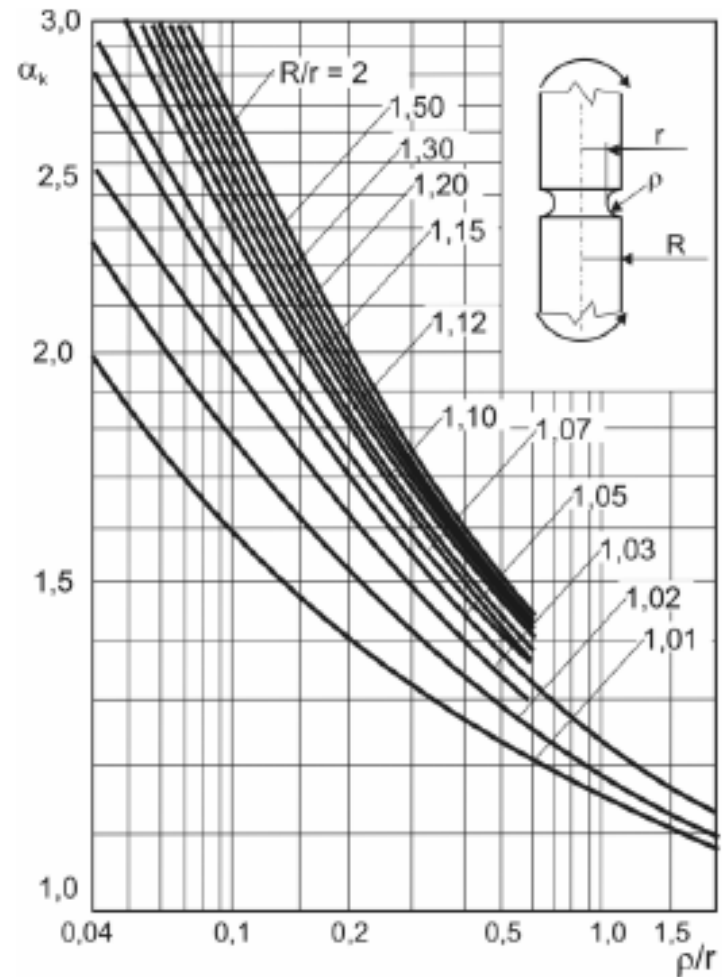
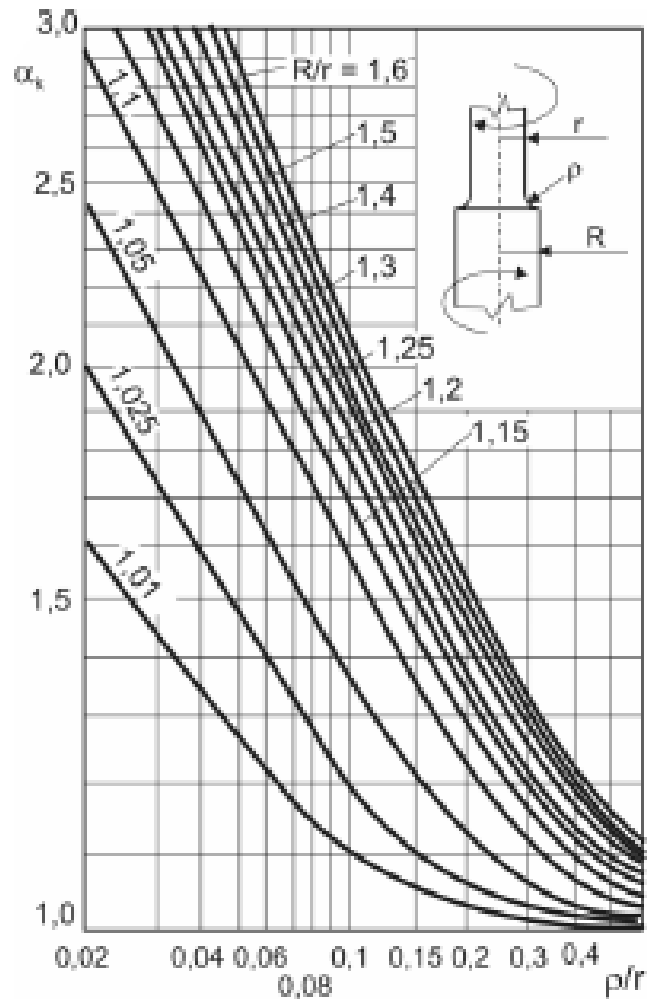
$$\alpha_k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m}$$

Dla konkretnej geometrii karbu

$$\alpha_k = f\left(\frac{R}{r}, \frac{\rho}{r}, \omega\right)$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Kształt przedmiotu - KARB



ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Sumaryczny współczynnik spiętrzenia naprężeń

$$\beta = \beta_k + \beta_p - 1$$

Współczynnik
działania karbu

$$\beta_k = \frac{Z_{gł}}{Z_K}$$

$Z_{gł}$ – granica zmęczenia próbki gładkiej
 Z_K – granica zmęczenia próbki z karbem

Współczynnik wpływu
chropowatości

$$\beta_p = \frac{Z_{pol}}{Z_{obr}}$$

Z_{pol} – granica zmęczenia próbki
polerowanej

Z_{obr} – granica zmęczenia przy zadanej
chropowatości

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Sumaryczny współczynnik spiętrzenia naprężeń

$$\beta = \beta_k \cdot \beta_{pz}$$

Współczynnik
działania karbu

$$\beta_k = \frac{Z_{gł}}{Z_K}$$

$Z_{gł}$ – granica zmęczenia próbki gładkiej
 Z_K – granica zmęczenia próbki z karbem

Współczynnik wpływu
obróbki powierzchni

$$\beta_{pz} = \frac{Z}{Z_{pz}}$$

Z – granica zmęczenia próbki bez
obróbki powierzchniowej
 Z_{pz} – granica zmęczenia próbki po
obróbce powierzchniowej

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik działania karbu

$$\beta_k = 1 + \eta_k (\alpha_k - 1)$$

Współczynnik kształtu karbu

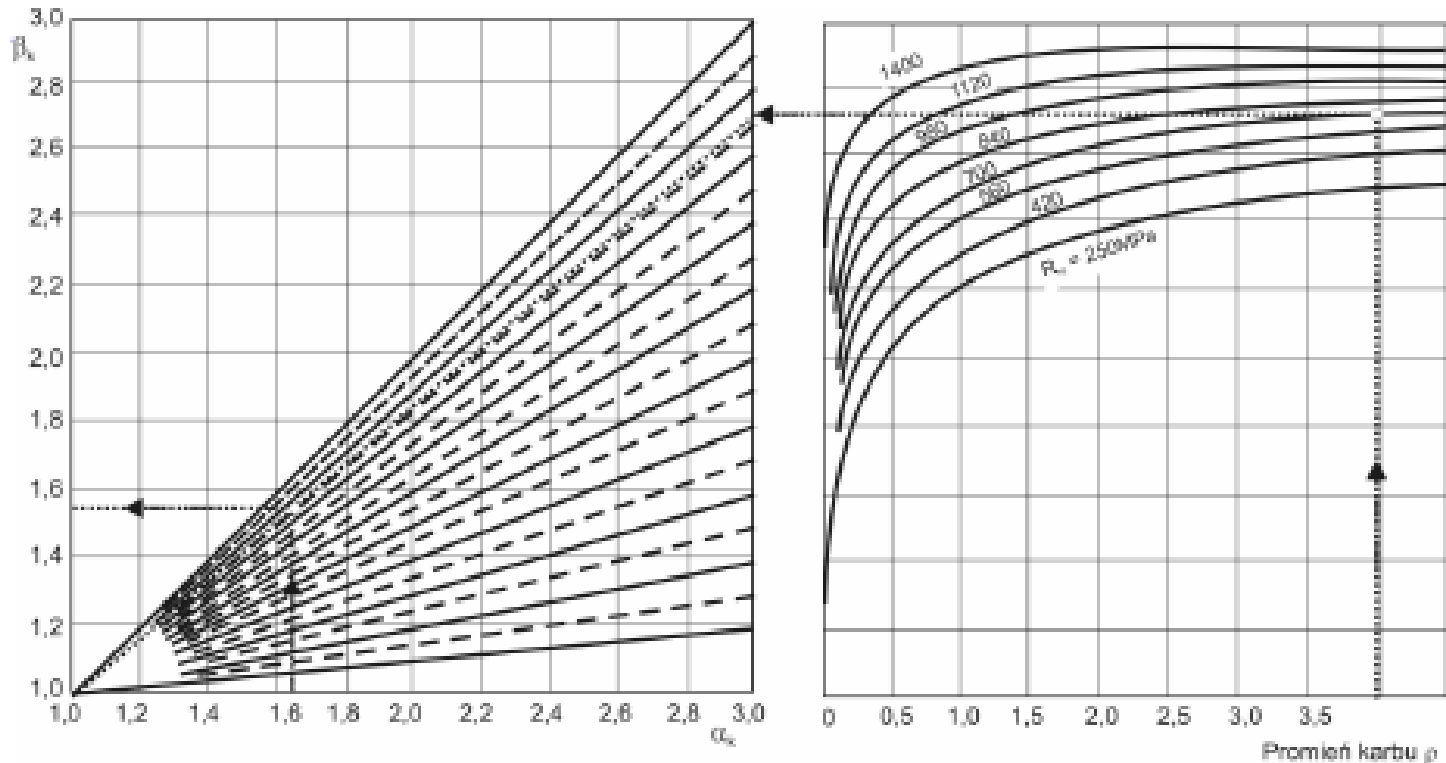


Współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu

(im wyższe R_m tym większa wrażliwość)

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik działania karbu

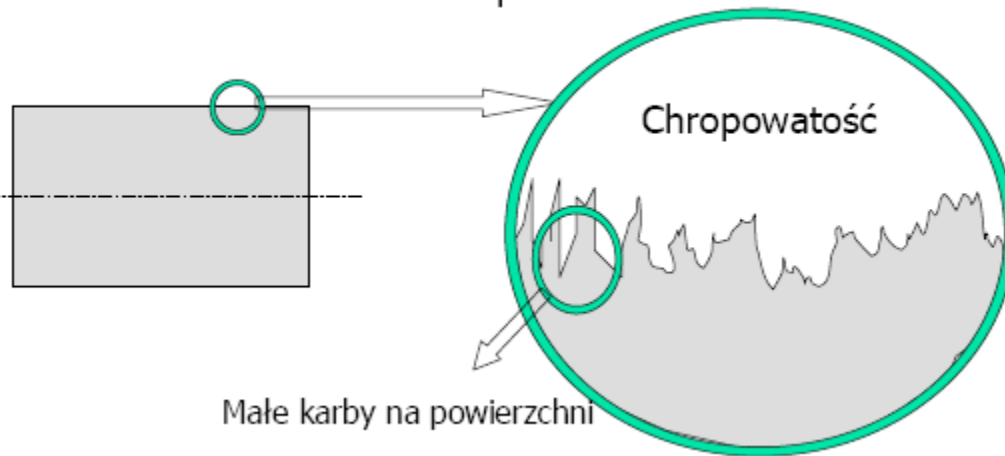


$$\beta_k = f(\alpha_k, \rho, R_m)$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

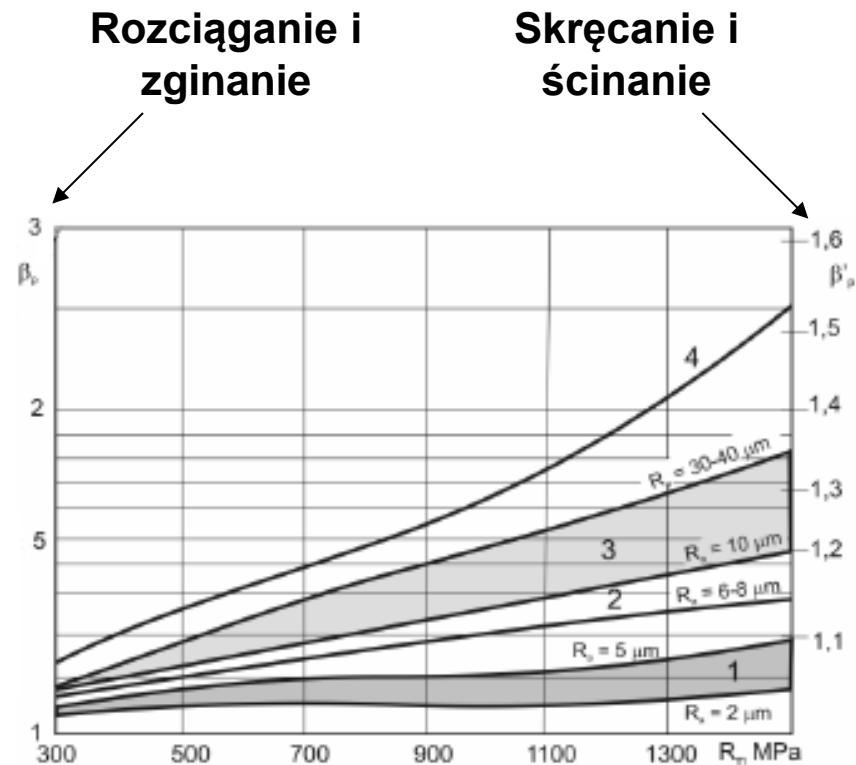
Współczynnik wpływu chropowatości

Geometria powierzchni



Małe karby na powierzchni

- 1 – szlifowanie
- 2 – toczenie, frezowanie dokładne
- 3 – toczenie, frezowanie zgrubne,
- 4 – odlewanie, kucie,



ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Wielkość elementu – współczynnik wielkości przekroju

Większe elementy to większe prawdopodobieństwo wad, pęknięć i uszkodzeń.

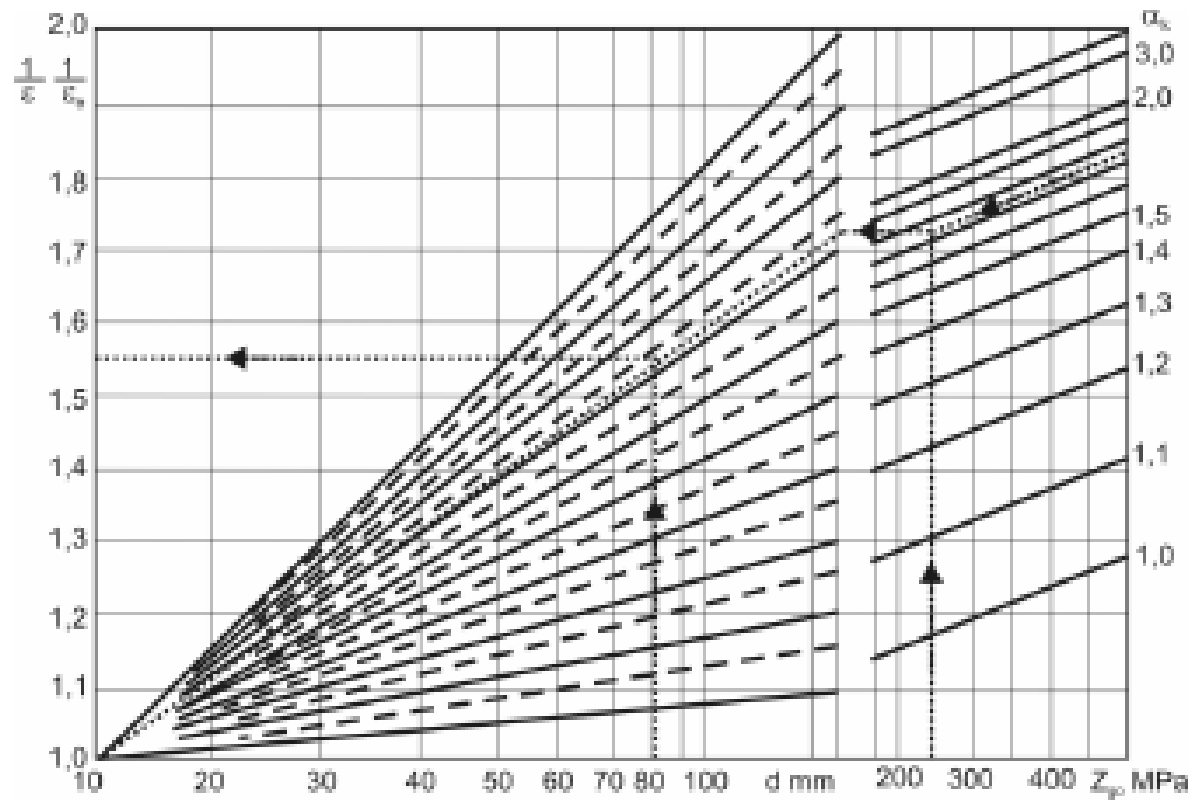
$$\varepsilon = \frac{Z_d}{Z}$$

granica zmęczenia dla próbki o dowolnym przekroju

granica zmęczenia dla próbki o przekroju wzorcowym (koło o średnicy 7mm)

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Wielkość elementu – współczynnik wielkości przekroju



ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik bezpieczeństwa – wartość graniczna δ_g

Wartości δ_g :

1,3 – 1,5 : znany rozkład naprężeń, wysoka technologia wykonania i przy

stosowaniu dobrych metod defektoskopowych

1,5 – 1,7 : zwykła dokładność obliczeń, dobra technologia wykonania i czynności kontrolne

1,7 – 2,0 : elementy o większych wymiarach, średnia dokładność obliczeń i wykonania

2,0 – 2,5 : przy orientacyjnym określeniu obciążeń i naprężeń, dla nieznanymi dokładnie warunków pracy

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik bezpieczeństwa – określenie
wartości rzeczywistej

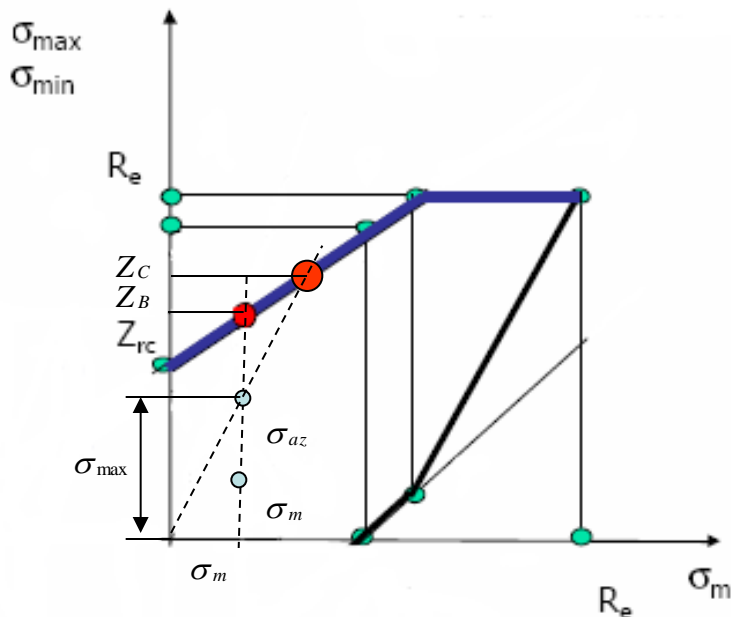
1 Cykle symetryczne

$$\delta = \frac{Z}{\sigma_{\max}} \geq \delta_g$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik bezpieczeństwa – określenie wartości rzeczywistej

2 Cykle niesymetryczne dla $R = \text{const}$



$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_{az}$$

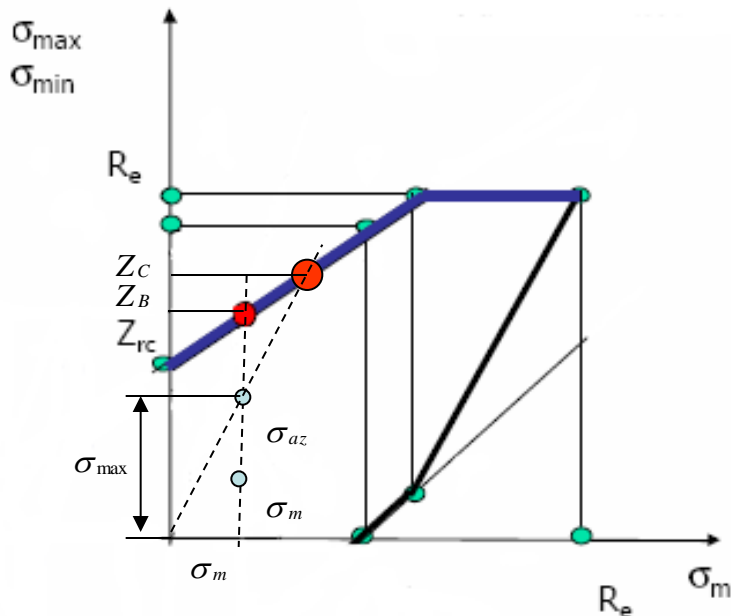
$$\sigma_{az} = \frac{\beta \sigma_a}{\varepsilon}$$

$$\delta = \frac{Z_c}{\sigma_{\max}} \geq \delta_g$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik bezpieczeństwa – określenie wartości rzeczywistej

3 Cykle niesymetryczne – przyrost obciążenia ze stałym σ_m



$$\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_{az}$$

$$\sigma_{az} = \frac{\beta \sigma_a}{\varepsilon}$$

$$\delta = \frac{Z_B}{\sigma_{\max}} \geq \delta_g$$

ETAP II – obliczenia zmęczeniowe

Współczynnik bezpieczeństwa – określenie wartości rzeczywistej

4 Naprężenia złożone

$$\delta = \frac{k \delta_{\sigma} \delta_{\tau}}{\sqrt{\delta_{\sigma}^2 + \delta_{\tau}^2}}$$

ETAP III – kształtowanie wałów

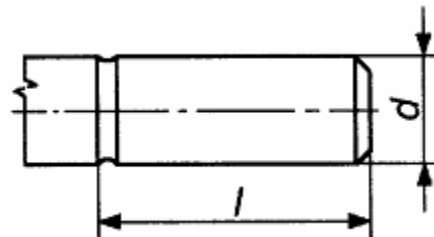
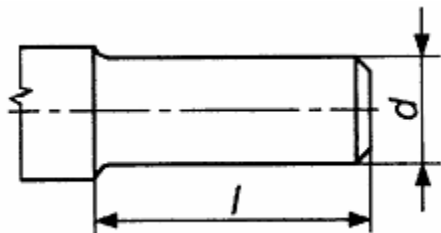
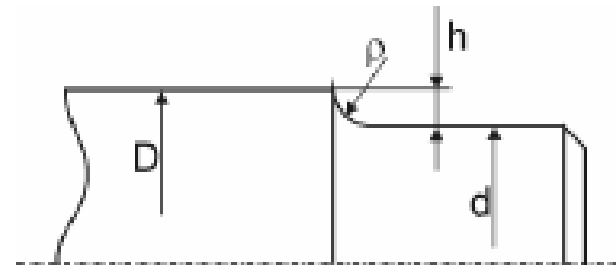
1. Wszystkie średnice muszą być większe od zarysu teoretycznego
2. Stopniowanie średnic

$$\frac{D}{d} \leq 1.2$$

3. Promienie zaokrągleń

$$\frac{\rho}{d} \approx 0.02$$

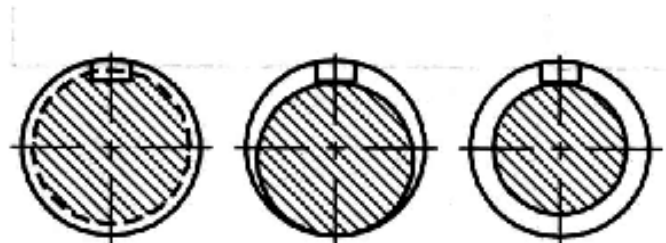
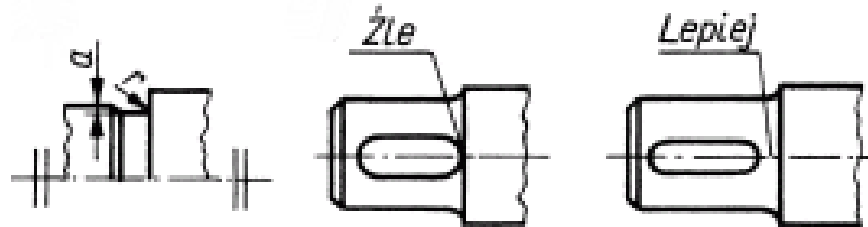
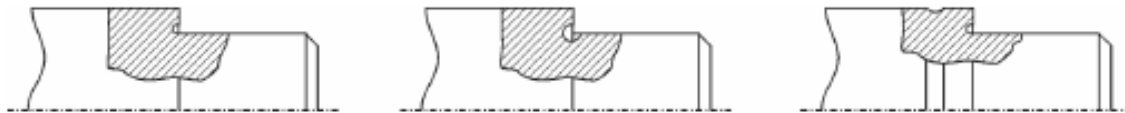
4. Średnice i długości czopów



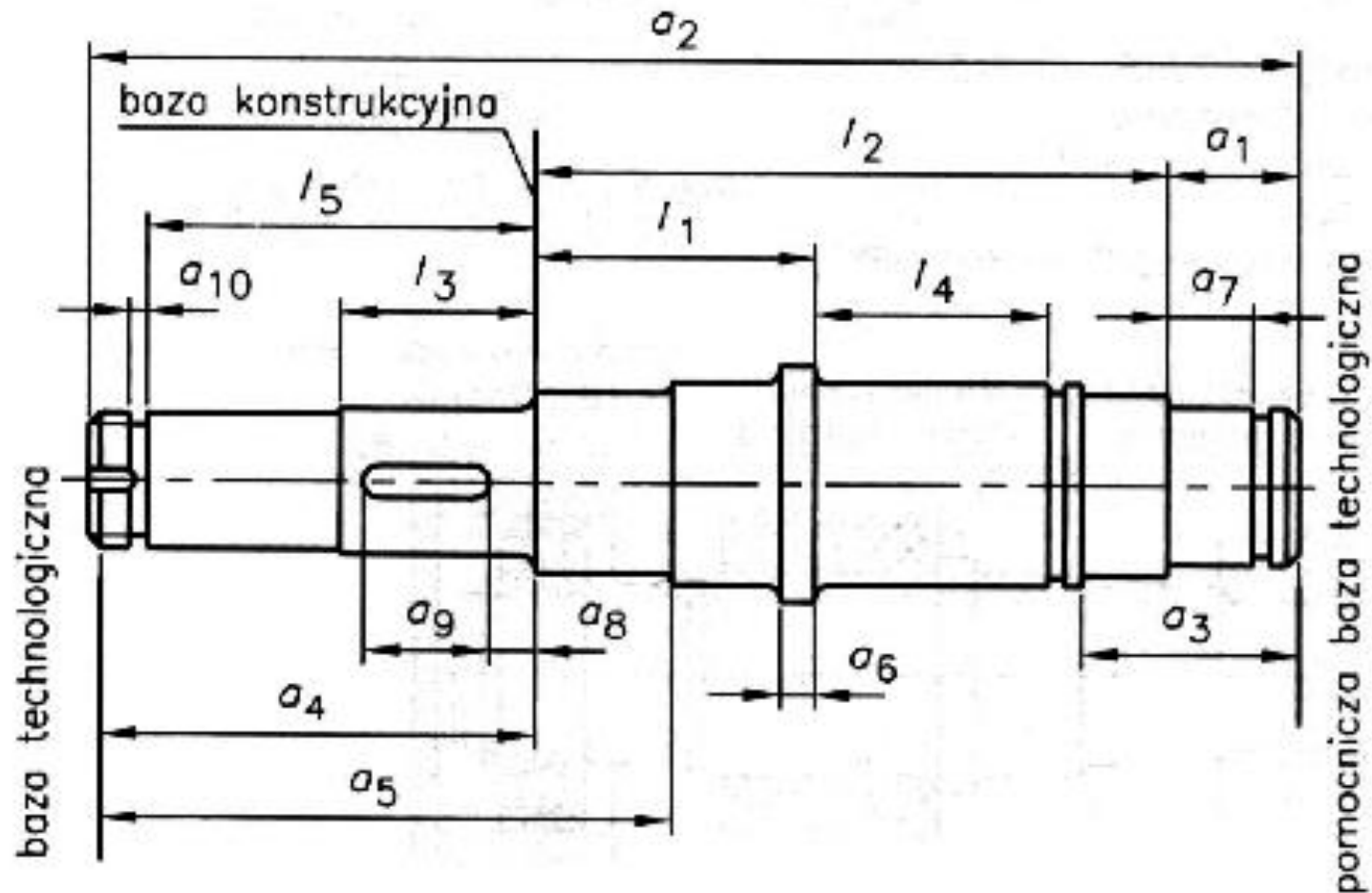
PN-78/M-85000

ETAP III – kształtowanie wałów

4. Poprawa wytrzymałości zmęczeniowej



ETAP III – kształtowanie wałów



ETAP III – kształtowanie wałów

