Wrocław University of Technology

Teoria systemów i mechanizmów

Opracował:
dr inż. Przemysław Jaszak

Katedra Mechaniki, Maszyn, Urządzeń i Procesów Energetycznych

ul. Na Grobli 15, Wrocław
bud. L-1, pok. 312
tel. 71 320 4825

Wykład 7

Siły w mechanizmach i ich redukcja

Rodzaje sił

Siły występujące w członach mechanizmów możemy podzielić wg. kilku podstawowych kryteriów:

1. Ze względu na miejsce działania sił:
- wewnętrzne (np. siły działające w przekroju poprzecznym członu lub siły oddziaływania pomiędzy członami-siły reakcji),
- zewnętrzne (np. siła ciężkości, siły technologiczne).

2. Ze względu na sposób dostarczenia mocy do układu:

- siły czynne (napędowe) o mocy dodatniej,
- siły bierne (oporu) o mocy ujemnej.

Siły czynne są z reguły typu zewnętrznego pochodzące od różnego rodzaju napędów –silników.

Siły bierne przeciwstawiające się ruchowi możemy z kolei podzielić na:
- opory użyteczne (np. siła skrawania, podnoszonego ciężaru),
- opory szkodliwe (np. siła tarcia, siła oporu ośrodka).

Rodzaje sił

3. Ze względu na przyczynę powstawania:

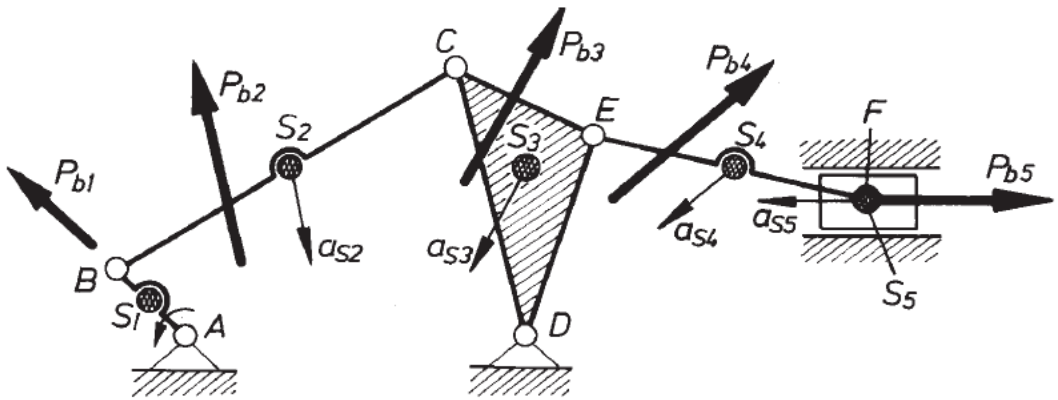
- **siły ciężkości**, czyli siły pola grawitacyjnego *(G = mg)* zgodnie z prawem grawitacji. Zależne od położenia, w przypadku małych przemieszczeń przyjmujemy je jako stałe.
- **siły tarcia suchego**, których wartość jest w przybliżeniu stała a zwrot zależny od prędkości względnej członów zgodnie z prawem Coulomba,
- **siły tarcia wiskotycznego** proporcjonalne do prędkości (pierwszej pochodnej przemieszczenia),
- **siły bezwładności** proporcjonalne do przyspieszenia (drugiej pochodnej przemieszczenia),
- **siły zależne równocześnie od szeregu parametrów** np. czasu, przemieszczenia prędkości, przyspieszenia itp.

Rodzaje sił

Siły bezwładności

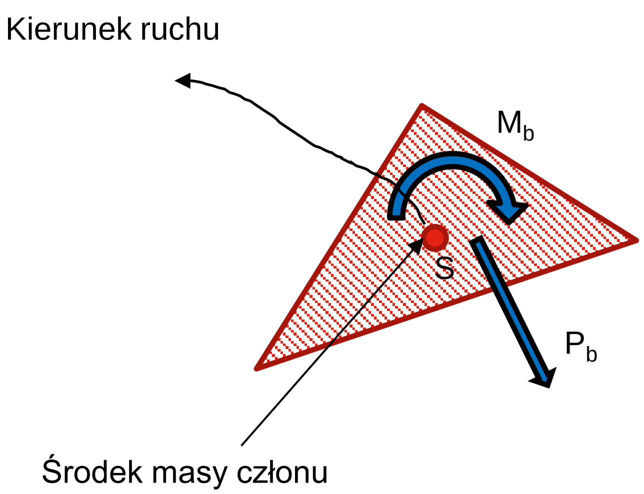
Siły bezwładności

Każdemu członowi mechanizmu można przypisać siłę bezwładności lub/i moment bezwładności jeżeli znana jest masa członu jej rozkład (środek masy) oraz rodzaj ruchu jaki ten człon wykonuje.



Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

W zależności od charakteru ruchu, na człon może działać siła bezwładności lub/i moment siły bezwładności.



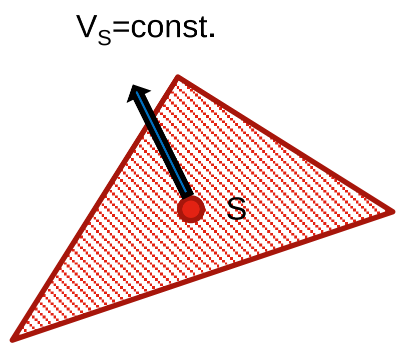
Siła bezwładności: $P_b = -a_S \cdot m$
Moment siły bezwładności: $M_b = -\varepsilon_S \cdot J_S$

gdzie:

m –masa członu
a_S – przyspieszenie środka masy członu
ε_S – przyspieszenie kątowe członu
J_S – masowy moment bezwładności środka masy członu

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w **<u>ruchu jednostajnym</u>** postępowym

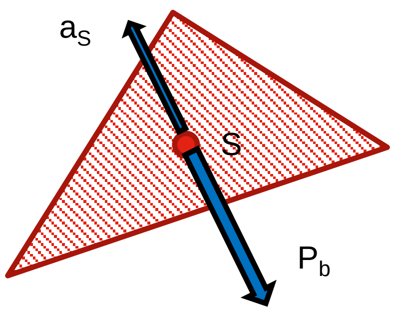


V_S=const.
a_S=0
ε=0
P_b=0
M_b=0

Na człon nie działa obciążenie wywołane bezwładnością.

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w **<u>ruchu niejednostajnym</u>** postępowym

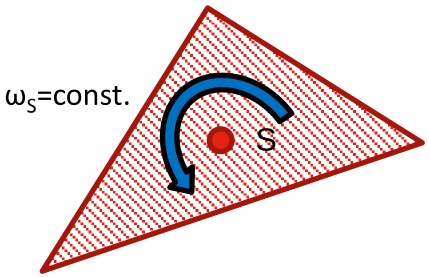


a_S=const.
$P_b=-a_S \cdot m$
$M_b=0$

Na człon działa siła bezwładności przeciwnie skierowana do przyspieszenia a linia jej działania przechodzi przez środek masy członu.

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w ruchu **jednostajnie obrotowym** przechodzącym **przez środek masy członu**

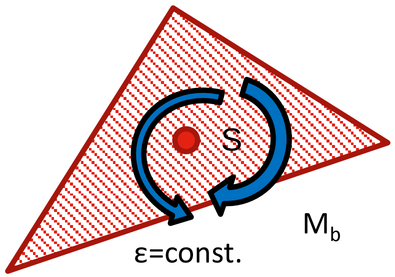


$a_S=0$
$P_b=0$
$\varepsilon=0$
$M_b=0$

Na człon nie działa żadne z obciążeń wynikające z bezwładności.

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w **ruchu niejednostajnie** obrotowym przechodzącym **przez środek masy członu**

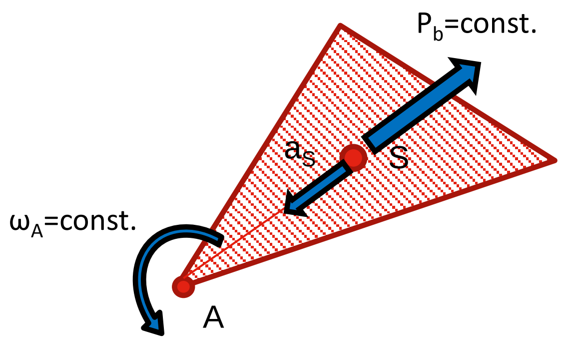


$a_S=0$
$P_b=0$
$\varepsilon=const.$
$M_b=-\varepsilon \cdot J_S$

Na człon działa moment bezwładności o kierunku przeciwnym do przyspieszenia kątowego.

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w ruchu **jednostajnie** obrotowym **nie przechodzącym** przez środek masy członu.

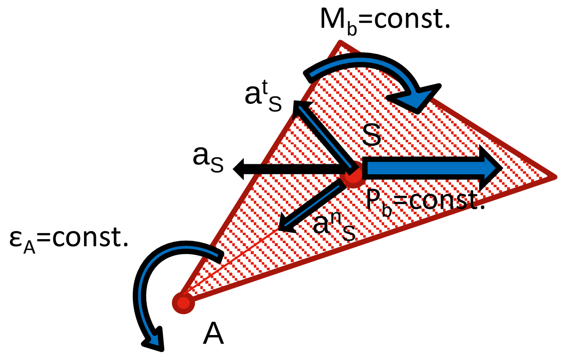


$a_S=a^n_S=\omega^2_A \cdot AS$
$P_b=P^n_b=-a^n_S \cdot m$
$\varepsilon=0$
$M_b=0$

Na człon działa składowa normalna siły bezwładności (siła odśrodkowa).

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Człon w ruchu **niejednostajnie** obrotowym **nie przechodzącym** przez środek masy członu.

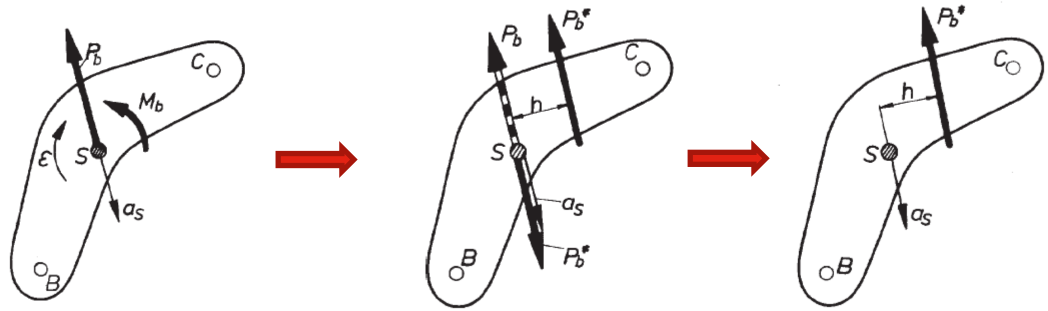


$a_S=a^n_S+a^t_S$
$P_b=-a_S \cdot m$
ε=const.
$M_b=-\varepsilon_A \cdot J_S$

Na człon działa siła bezwładności oraz moment bezwładności

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Jeżeli na człon działa siła bezwładności oraz moment siły bezwładności to układ taki można zrównoważyć do występowania w nim tylko jednej wypadkowej siły bezwładności przyjmując, że moment ten generuje parę sił bezwładności:



Przyjmując, że siła równoważąca jest równa: $\overline{P}_b^* = \overline{P}_b = -m \cdot \overline{a}_S,$

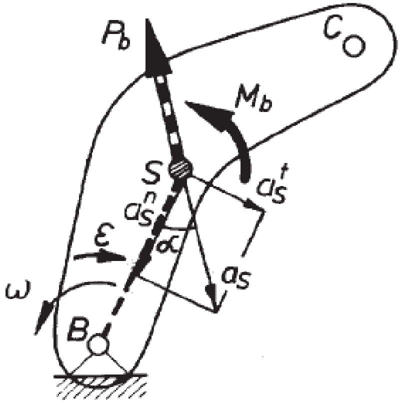
Wtedy ramię działania pary sił równoważących:

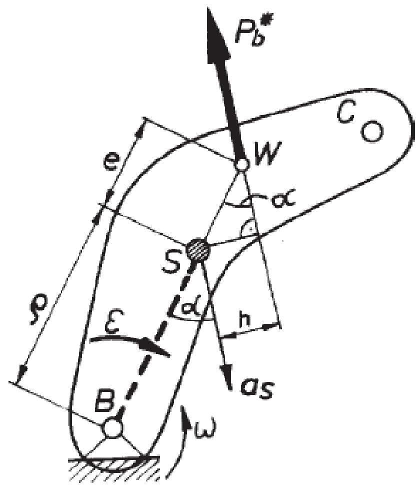
$$h = \frac{M_b}{P_b^*},$$

Siły bezwładności - szczególne przypadki ruchu członu

Wiec, jeżeli człon jest w ruchu niejednostajnym obrotowym nie przechodzącym przez środek masy, to:

$$\overline{P}_b = -m \cdot \overline{a}_S \quad \text{i} \quad \overline{M}_b = -J_S \cdot \overline{\varepsilon}.$$





Po zamianie momentu obrotowego na parę sił równoważących układ redukuje się do jednej siły, której kierunek działania przechodzi przez punkt (W) zwany punktem uderzeń.

$$BW = BS + SW = \rho + e,$$

Zgodnie z zapisem trygonometrycznym:

$$SW = e = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{J_S \cdot |\varepsilon|}{m \cdot a_s \cdot \sin\alpha} = \frac{m \cdot i_s^2\, \varepsilon}{m \cdot a_s^t} = \frac{i_s^2\, |\varepsilon|}{\rho \cdot |\varepsilon|} = \frac{i_s^2}{\rho},$$

Ostatecznie:

$$e = \frac{i_s^2}{\rho},$$

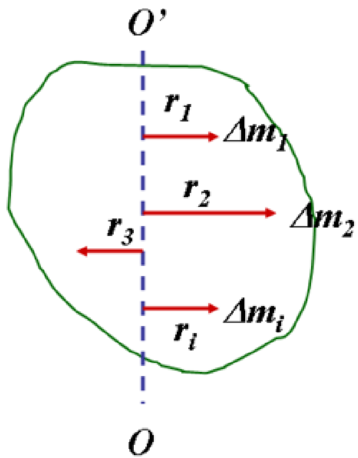
gdzie: i_S – to promień bezwładności względem środka masy członu.

Siły bezwładności

Masowy moment bezwładności:

Dla punktu materialnego: $I = m \cdot r^2$

Dla bryły sztywnej: $I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \cdot r_i^2$



Dla obiektów o ciągłym rozkładzie masy

$$I = \lim_{N\to\infty} \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \int_M r^2 dm$$

Siły bezwładności

Masowy moment bezwładności różnych brył sztywnych

Ciało	Rysunek	Wzór	Ciało	Rysunek	Wzór
Punkt materialny		$I=mr^2$	Kula		$I=\frac{2}{5}mR^2$
Cienki pręt		$I=\frac{1}{3}mL^2$	Sfera cienkościenna		$I=\frac{2}{3}mR^2$
		$I=\frac{1}{12}mL^2$	Cienka tarcza (koło)		$I=\frac{1}{2}mR^2$
		$I=\frac{1}{3}mL^2\sin^2\alpha$	Elipsoida		$I=\frac{1}{5}m(b^2+c^2)$
Walec	D	$I=\frac{1}{2}mR^2=$ $=\frac{1}{8}mD^2$	Stożek		$I=\frac{3}{10}mR^2$
		$I=\frac{m}{12}(L^2+3R^2)=$ $=\frac{m}{12}(L^2+\frac{3}{4}D^2)$	Prostopadłościan		$I=\frac{m}{12}(a^2+b^2)$
Walec wydrążony		$I=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)=$ $=\frac{1}{8}m(D^2+d^2)$	Sześcian		$I=\frac{1}{6}ma^2$
Cienkościenna obręcz		$I=mR^2$	Torus		$I=m(R^2+\frac{3}{4}r^2)$

Ogólnie można zapisać:

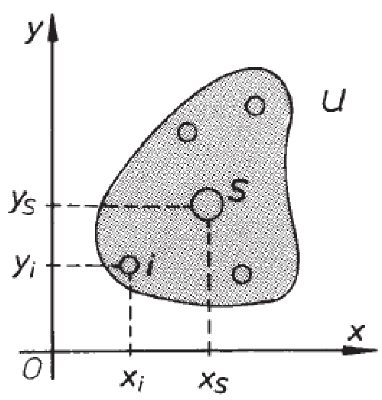
$$I=m\cdot r_b^2$$

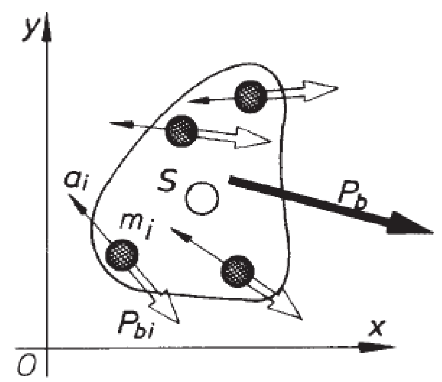
gdzie: r_b- jest to promień bezwładności (bryły)

Siły bezwładności

Redukcja sił bezwładności metodą mas zastępczych

W metodzie tej elementarne pole sił masowych członu zastępuje się modelem kilku mas skupionych o znanym położeniu i znanych wartościach przyspieszeń w tych położeniach.





Wtedy wypadkowa siła bezwładności jest sumą sił bezwładności występujących w przyjętych punktach masowych:

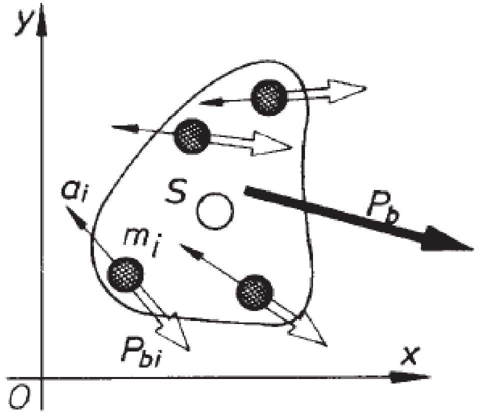
$$P_b = \sum_{i=1}^{n} P_{bi} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot a_i$$

Siły bezwładności

Redukcja sił bezwładności metodą mas zastępczych

Model członu musi być masowo równoważny, tzn. musi mieć:

- tą samą masę: $\sum m_i = m,$
- tak samo położony środek ciężkości: $\sum m_i x_i = m \cdot x_s,\quad \sum m_i y_i = m \cdot y_s$
- Takie same momenty bezwładności względem środka masy: $\sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = J_s + m(x_s^2 + y_s^2)$



Gdzie:

m_i – masa zastępcza umieszczona w i-tym punkcie,

x_i, y_i – współrzędne i-tych mas zastępczych w układzie współrzędnych prostokątnych xOy

x_s, y_s – współrzędne środka ciężkości,

m – masa członu rzeczywistego,

J_s – masowy moment bezwładności członu rzeczywistego względem środka masy członu.

Siły bezwładności

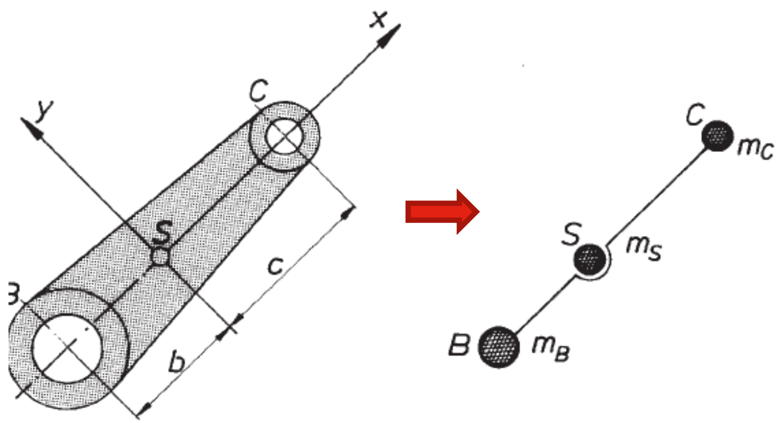
Redukcja sił bezwładności metodą mas zastępczych

W metodzie tej zakłada się dowolne położenie i-tych mas skupionych przy czym należy pamiętać, że każdy i-ty punkt masowy wyznaczony jest przez trzy parametry: x_i, y_i i m_i. Do wyznaczenia tych parametrów mamy cztery równania równowagi. Należy jednak pamiętać, że liczba założonych (znanych) parametrów musi spełniać równanie:

$$p = 3n - 4,$$

gdzie: *p* – liczba założonych parametrów, *n* –liczba mas skupionych.

Jeżeli trzy masy skupione leżą na jednej linii, a dodatkowo jedna z nich leży w środku ciężkości członu wtedy układ można sprowadzić do zapisu trzech równań równowagi:



$$m_B + m_S + m_C = m,$$

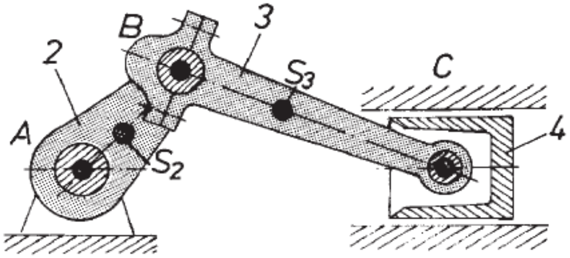
$$-m_B \cdot b + m_C \cdot c = 0,$$

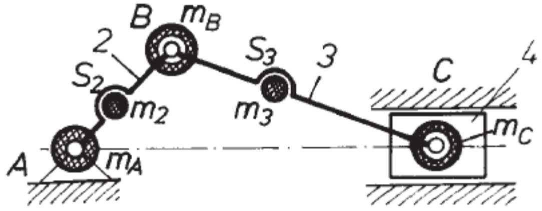
$$m_B \cdot b^2 + m_C \cdot c^2 = J_S.$$

Siły bezwładności

Redukcja sił bezwładności metodą mas zastępczych

Z praktycznego punktu widzenia poza umiejscowieniem masy skupionej w środku ciężkości członu dogodnie jest umieszczać masy w miejscach par obrotowych ze względu na łatwe określenie przyspieszeń.

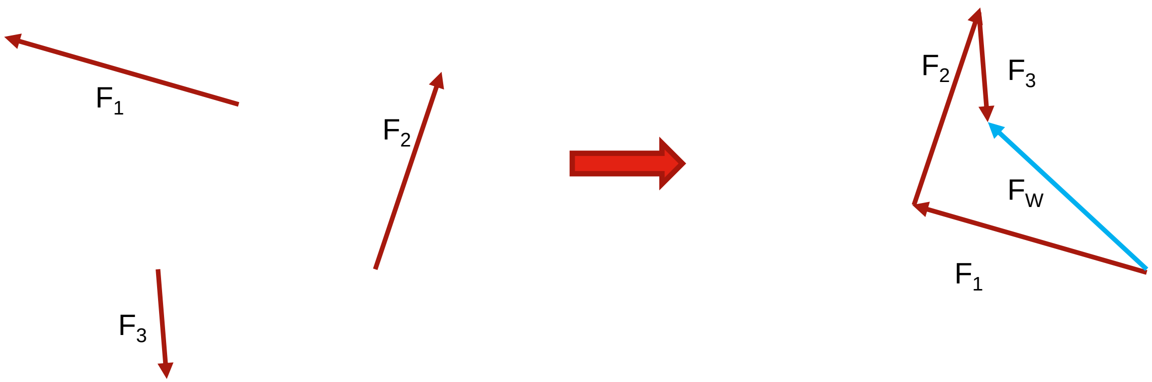




Redukcja układu sił

Wykreślanie siły wypadkowej metodą wieloboku sznurowego - przypomnienie

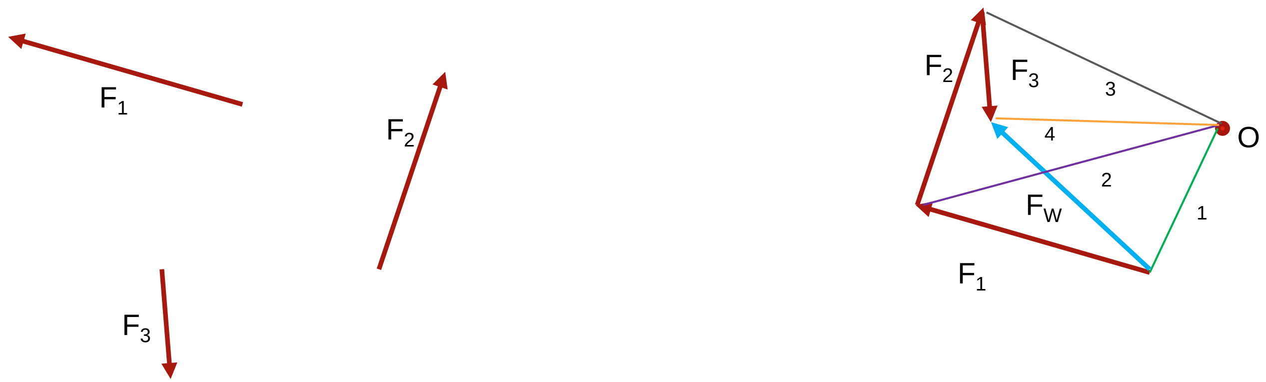
Linie działania siły wypadkowej w płaskim układzie sił można wyznaczyć metodą wieloboku sznurowego. W celu wyznaczenia modułu i zwrotu siły wypadkowej w pierwszej kolejności wykreślamy plan sił utworzony z wektorów F_1, F_2 i F_3. Zamknięcie wieloboku wyznacza moduł i zwrot siły wypadkowej F_W.



Redukcja układu sił

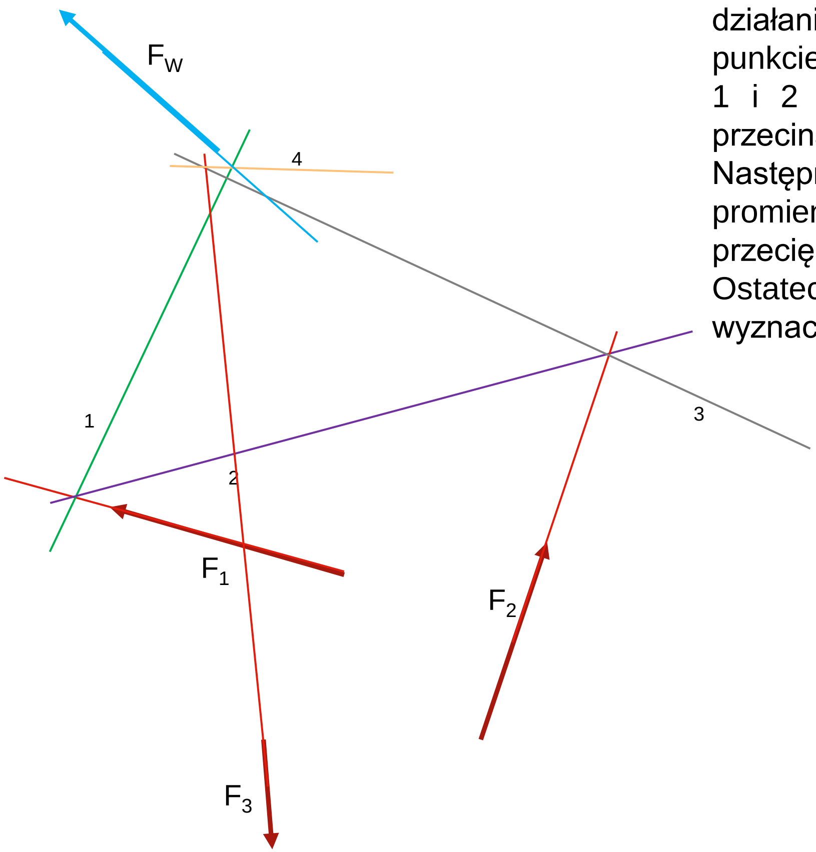
Wykreślanie siły wypadkowej metodą wieloboku sznurowego - przypomnienie

Na tak utworzonym planie z dowolnego punktu (bieguna 0) prowadzimy odcinki (promienie) łączące początki i końce poszczególnych wektorów. Promieniom tym nadajemy kolejne numery.

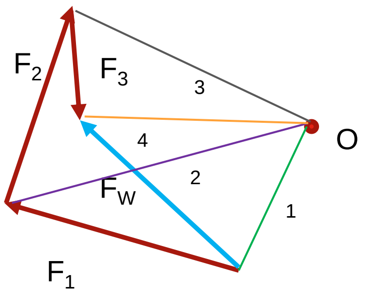


Redukcja układu sił

Wykreślanie siły wypadkowej metodą wieloboku sznurowego - przypomnienie



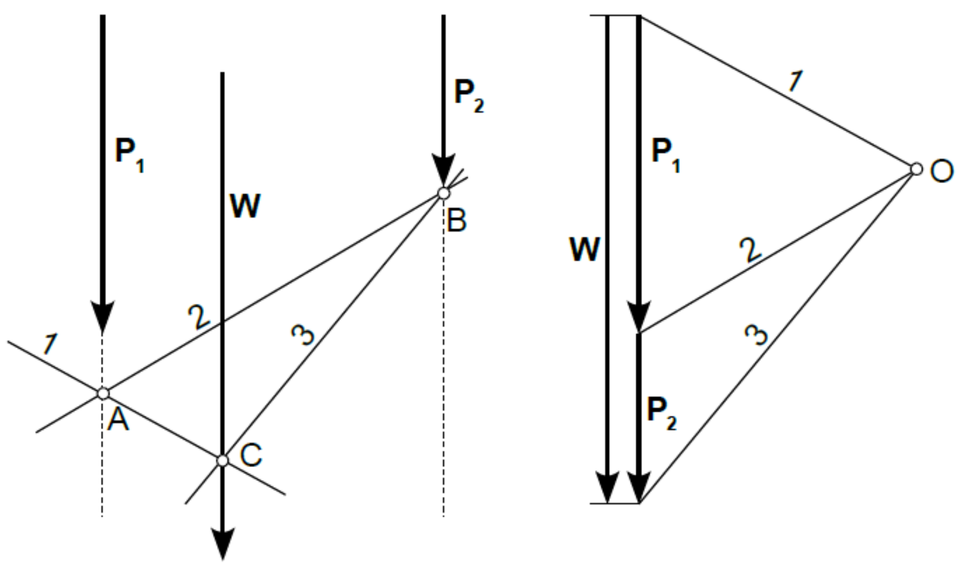
Następnie wyznaczone promienie przenosimy na linie działania poszczególnych sił prowadząc do ich przecięcia w punkcie wspólnym. Zaczynamy od przeniesienia promieni 1 i 2 na linię działania siły F_1 – promienie te muszą przecinać się w wspólnym punkcie na linii działania siły F_1. Następnie na kierunku siły F_2 znajdujemy przecięcie się promieni 2 i 3. Postępując analogicznie znajdujemy przecięcie się promieni 3 i 4 na linii działania siły F_3. Ostatecznie znajdujemy przecięcie się promieni 1 i 4, które wyznaczają linię działania siły wypadkowej F_W.



Redukcja układu sił

Wykreślanie siły wypadkowej metodą wieloboku sznurowego - przypomnienie

Przykład sił równoległych o tych samych zwrotach.

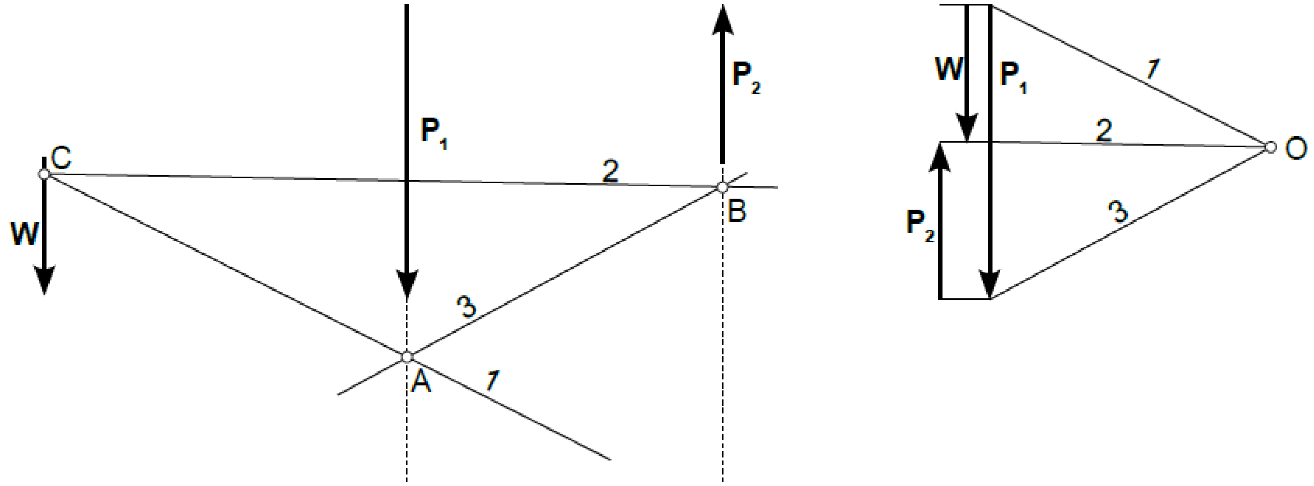


Siła wypadkowa dwóch sił równoległych mających te same zwroty znajduje się pomiędzy nimi, bliżej siły o większej wartości.

Redukcja układu sił

Wykreślanie siły wypadkowej metodą wieloboku sznurowego - przypomnienie

Przykład sił równoległych o przeciwnych zwrotach.

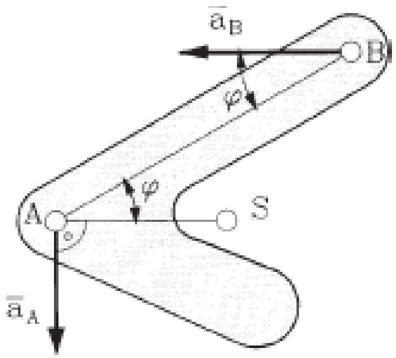


Siła wypadkowa dwóch sił równoległych mających przeciwne zwroty znajduje się poza nimi, po stronie siły o większej wartości.

Siły bezwładności

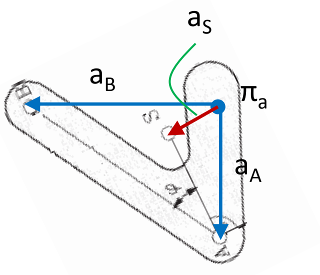
Zadanie

Wyznaczyć siłę bezwładności członu poruszającego się ruchem płaskim, jeżeli znane są wymiary l_{AB}=1m, l_{AS}=0.5m, φ=30 °, przyspieszenia a_A=20 m/s^2 oraz a_B=30 m/s^2, masowy moment bezwładności Is=kg·m^2, masa członu m=10 kg.



Zadanie rozpoczynamy od wyznaczenia przyspieszenia w środku ciężkości *S*. W tym celu wykorzystujemy metodę planu przyspieszeń.

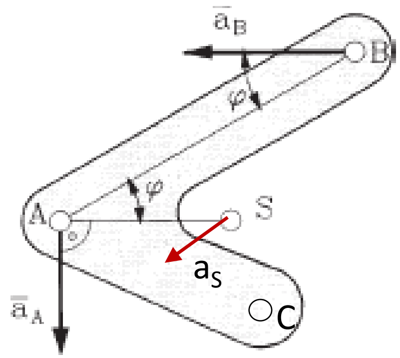
Przyjmujemy podziałkę przyspieszeń: 1cm=10m/s^2.
Z bieguna π_a rysujemy wektory przyspieszeń punktów A i B. Człon obracamy i dopasowujemy (skalujemy) tak aby końce wektorów a_A i a_B znajdowały się w punktach A i B. Następnie z punktu biegunowego oraz punktu S odmierzamy długość wektora a_S.

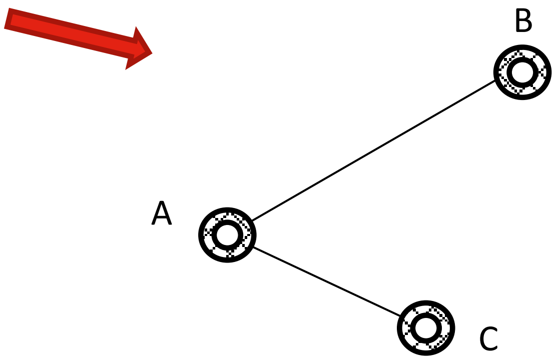


Siły bezwładności

Zadanie

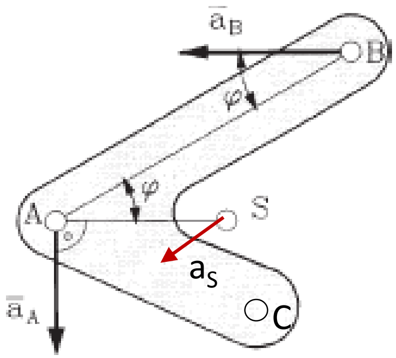
Przechodzimy do wyznaczenia linii działania siły bezwładności. W tym celu wykorzystujemy metodę mas skupionych. Budujemy model trój-masowy, w którym masy skupione przykładamy w punktach A, B i nie znanym jeszcze położeniu punktu C.





Siły bezwładności

Zadanie



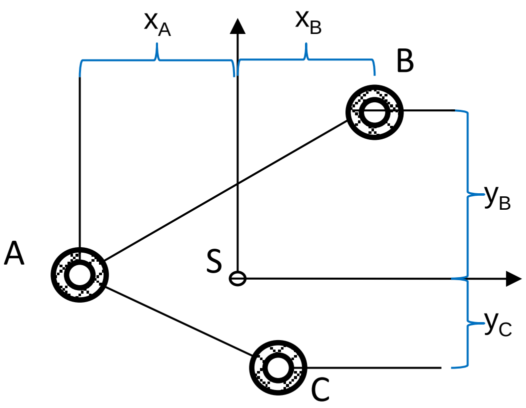
Zgodnie z równaniem:

$$p = 3n - 4,$$

liczba niezbędnych paramentów opisujących masową równowagę modelu wynosi 5.

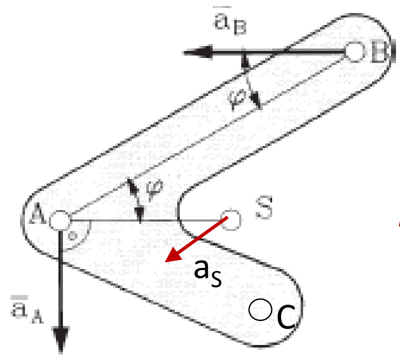
Cztery parametry są ściśle określone. x_A, y_A, x_B, y_B.

Jako piąty parametr przyjmujemy założoną współrzędną y_C=0.2 m.

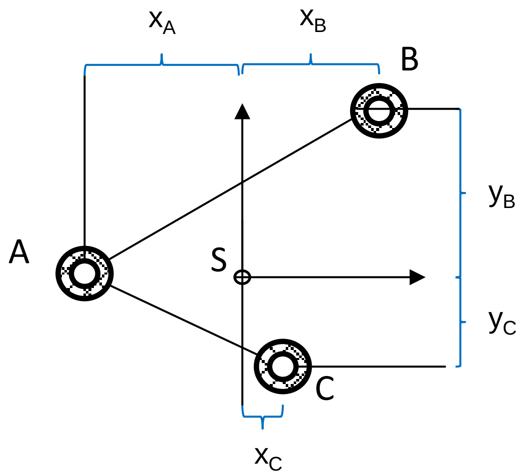


Siły bezwładności

Zadanie



Równanie równowagi modelu masowego zapewnia nam znalezienie czterech niewiadomych. Są to: m_A, m_B, m_C oraz współrzędna x_C.



Dane:
x_A, y_A, x_B, y_B, y_C

Szukane:
m_A, m_B, m_C, x_C

Siły bezwładności

Zadanie

Układ równań równowagi rozkładu masowego:

$$m_A + m_B + m_C = m,$$
$$x_A m_A + x_B m_B + x_C m_C = 0,$$
$$y_A m_A + y_B m_B + y_C m_C = 0,$$
$$(x_A + y_A)^2 m_A + (x_B + y_B)^2 m_B + (x_C + y_C)^2 m_C = I_S.$$

Po podstawieniu danych otrzymamy:

$$m_A + m_B + m_C = 10,$$
$$-0{,}5 m_A + 0{,}366 m_B + x_C m_C = 0,$$
$$0{,}5 m_B + 0{,}2 m_C = 0,$$
$$0{,}25 m_A + 0{,}384 m_B + x_C^2 m_C + 0{,}04 m_C = 2,.$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy:

$$m_A = 3{,}45 \text{ kg}, \; m_B = 1{,}87 \text{ kg}, \; m_C = 4{,}68 \text{kg}, \; x_C = 0{,}222 \text{ m}.$$

Siły bezwładności

Zadanie

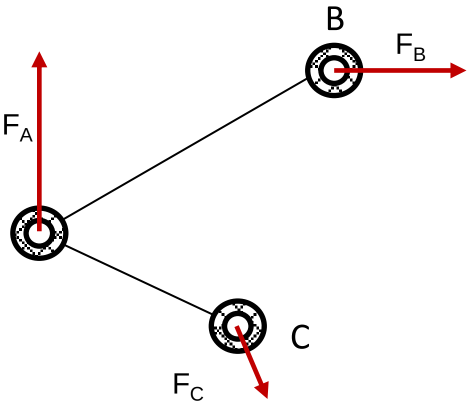
Znając współrzędną x_C wracamy do planu przyspieszeń po to, aby wyznaczyć przyspieszenie punktu C.

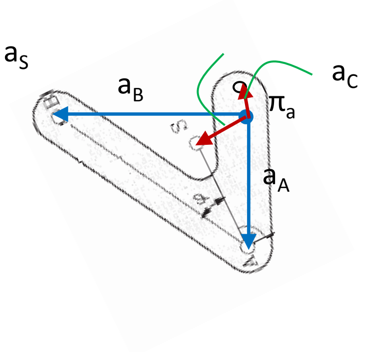
Siły bezwładności poszczególnych punktów masowych są znane co do kierunku modułu i punktu zaczepienia:

$$P_A = m_A \cdot a_A = 69\,\mathrm{N},$$

$$P_B = m_B \cdot a_B = 46{,}7\,\mathrm{N},$$

$$P_C = m_C \cdot a_C = 22{,}2\,\mathrm{N}$$





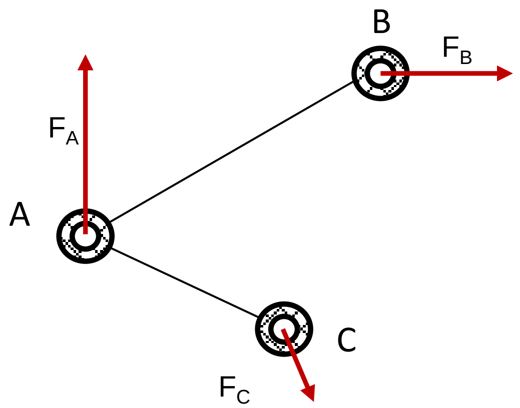
Wypadkowa siła bezwładności:

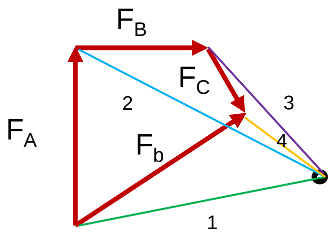
$$\overline{P}_b = \overline{P}_A + \overline{P}_B + \overline{P}_C.$$

Siły bezwładności

Zadanie

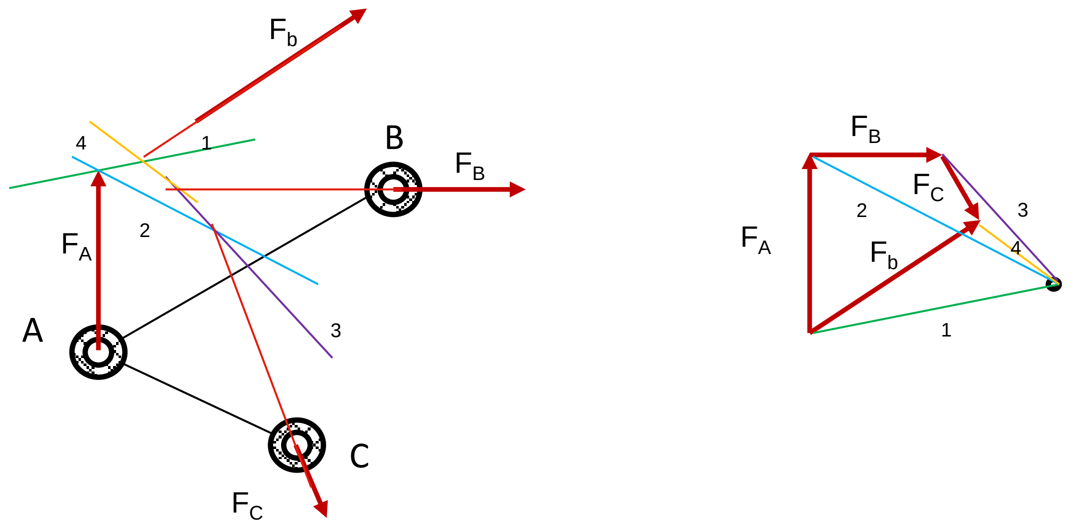
Linię działania wypadkowej siły bezwładności znajdujemy metodą wieloboku sznurowego. Przyjmujemy podziałkę siły
1 cm =20 N.





Siły bezwładności

Zadanie



Dziękuję za uwagę