Wrocław University of Technology

Teoria systemów i mechanizmów

Opracował:
Przemysław Jaszak

Katedra Inżynierii Konwersji Energii

ul. Na Grobli 15, Wrocław
bud. L-1, pok. 312
tel. 71 320 4825

Wykład 3

Położenia, trajektorie, prędkości i przyspieszenia układu kinematycznego

Kinematyka

Kinematyka obejmuje zagadnienia związane z badaniem ruchu mechanizmów bez uwzględnienia jego przyczyn powstawania oraz przy założeniu, że człony mechanizmu są sztywne. Przedmiotem rozważań są więc:

- Położenia członów
- Trajektorie punktów
- Prędkości liniowe i kątowe
- Przyspieszenia liniowe i kątowe.

Do określenia tych parametrów można korzystać z różnych metod:

- Graficznych
- Analitycznych
- Numerycznych
- Mieszanych

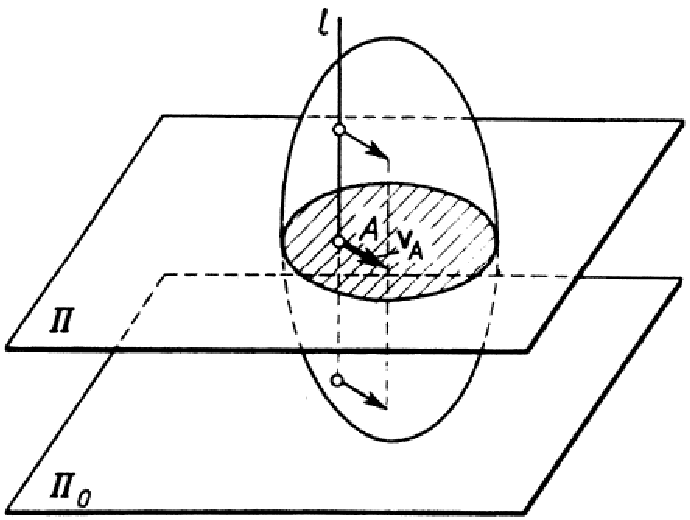
Rodzaje ruchu mechanizmów

Typy ruchu ciała sztywnego:

1. Ruch płaski:
- postępowy - prostoliniowy i krzywoliniowy,
- obrotowy.

2. Ruch przestrzenny:
- kulisty,
- śrubowy,
- ogólny.

Ruch płaski ciała sztywnego zachodzi wtedy, jeśli wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny.
Rozszerzając tę definicję na wszystkie człony ruchome mechanizmu wydziela się grupę zwaną *mechanizmami płaskimi*.
Większość mechanizmów stosowanych w praktyce zalicza się do tej grupy.

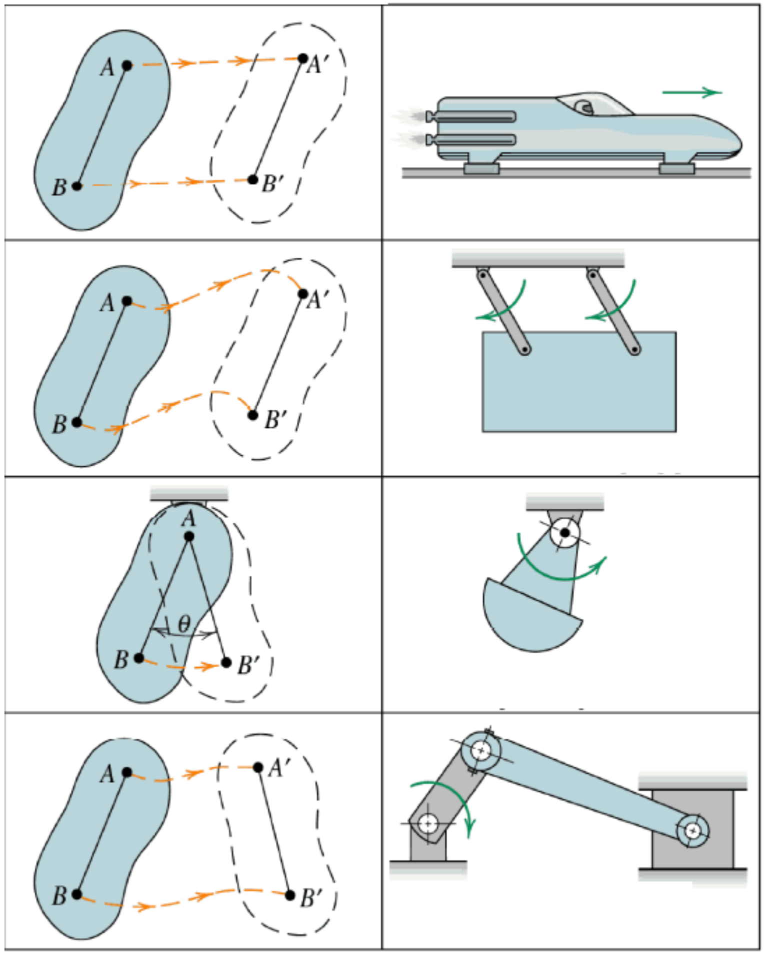


Rodzaje ruchu mechanizmów

Podział ruch płaskiego

1. Ruch postępowy
   - 1.1. Ruch prostoliniowy
   - 1.2 Ruch krzywoliniowy
2. Ruch obrotowy

Ruch płaski

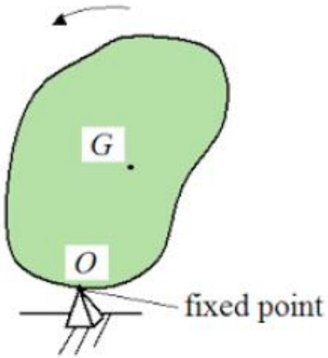


Rodzaje ruchu mechanizmów

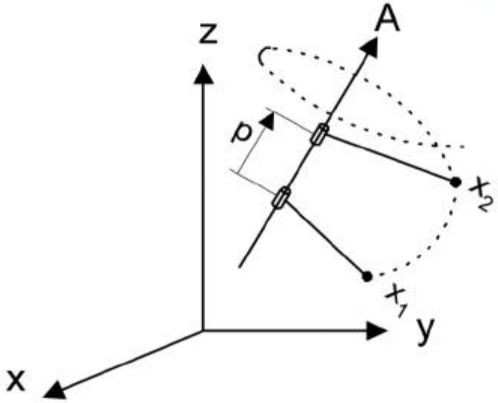
Podział ruchu przestrzennego

Ruch ogólny

Ruch kulisty



Ruch śrubowy

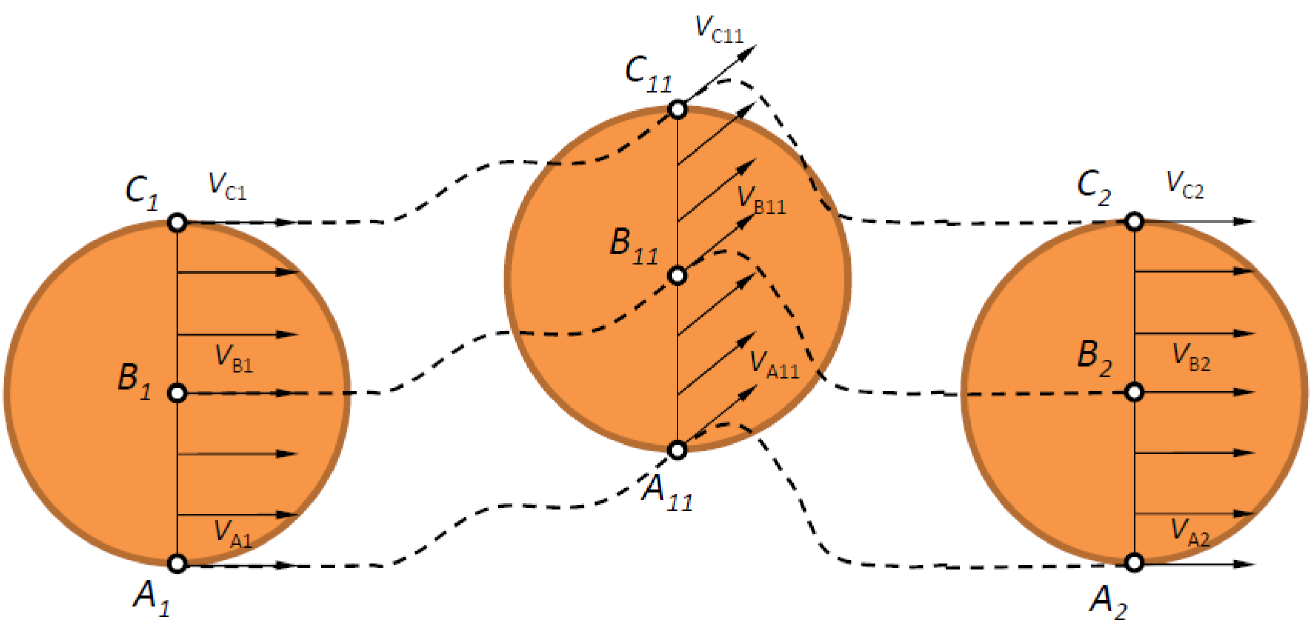


Rodzaje ruchu mechanizmów

*„Człon jest w **ruchu postępowym** wtedy, gdy dowolny odcinek, związany z tym członem, zachowuje we wszystkich fazach ruchu położenie równoległe”* [Miller 1996].

Dlatego w ruchu tym tory wszystkich punków członu są identyczne, tak jak i prędkości i przyspieszenia.

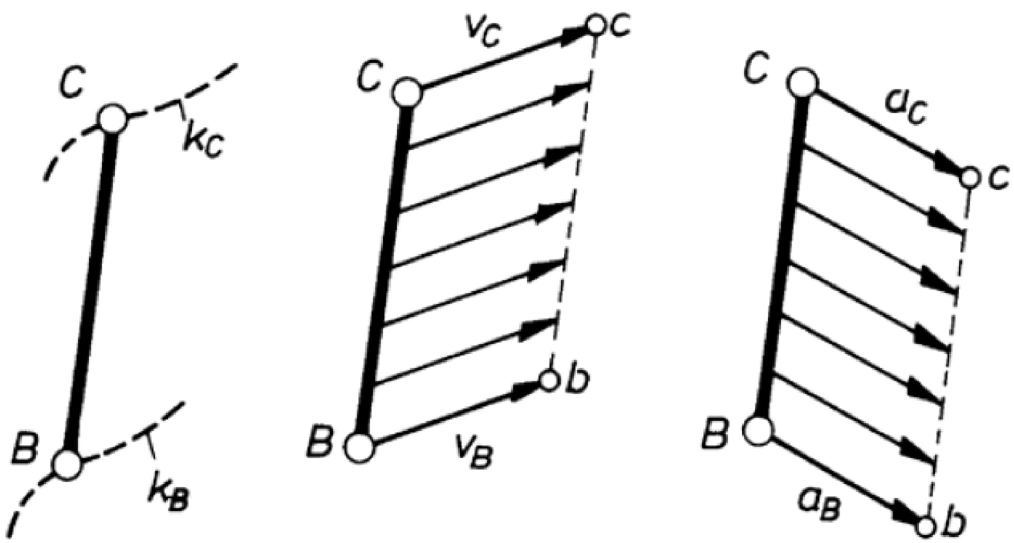
W ruchu prostoliniowym tory są linią prostą a w krzywoliniowym krzywą.



Rodzaje ruchu mechanizmów

$$v = ds/dt,$$ Prędkość [m/s]

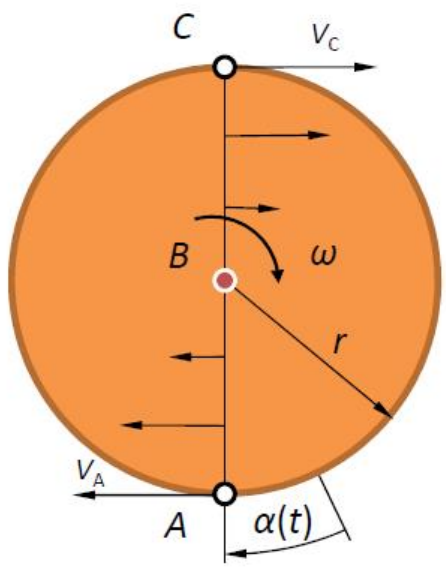
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$ Przyspieszenie [m/s²]



$$v_B = v_C = v_{i,} \quad \omega = 0,$$
$$a_B = a_C = a_{i,} \quad \varepsilon = 0,$$

Rodzaje ruchu mechanizmów

Ruch obrotowy występuje wtedy, jeśli tory wszystkich punków ciała zakreślają okręgi, których środki leżą na wspólnej prostej zwanej osią obrotu. Oznacza to, że każdy punkt ciała obraca się o taki sam kąt.



$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}$$ Prędkość kątowa [rad/s]

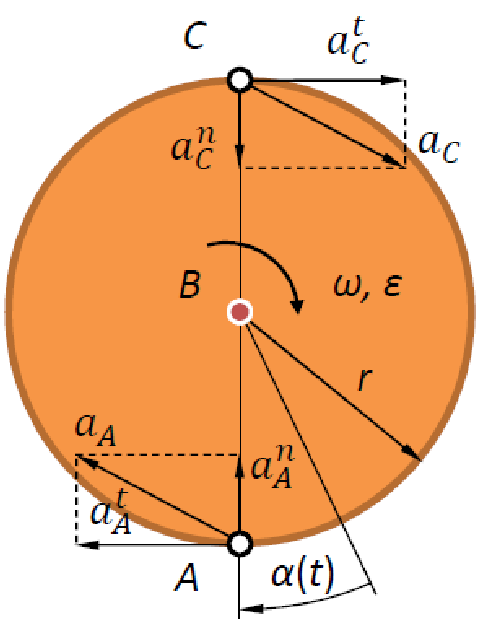
$$v_A = v_C = \omega \cdot r,$$ Prędkość liniowa [m/s]

$$v_B = 0.$$

$$\omega = \frac{\pi n}{30} [\mathrm{rad/s}]$$ n [obr/min]

Rodzaje ruchu mechanizmów

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha}$$ Przyspieszenie kątowe [rad/s²]



$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$ Przyspieszenie normalne

$$a_t = \varepsilon r$$ Przyspieszenie styczne

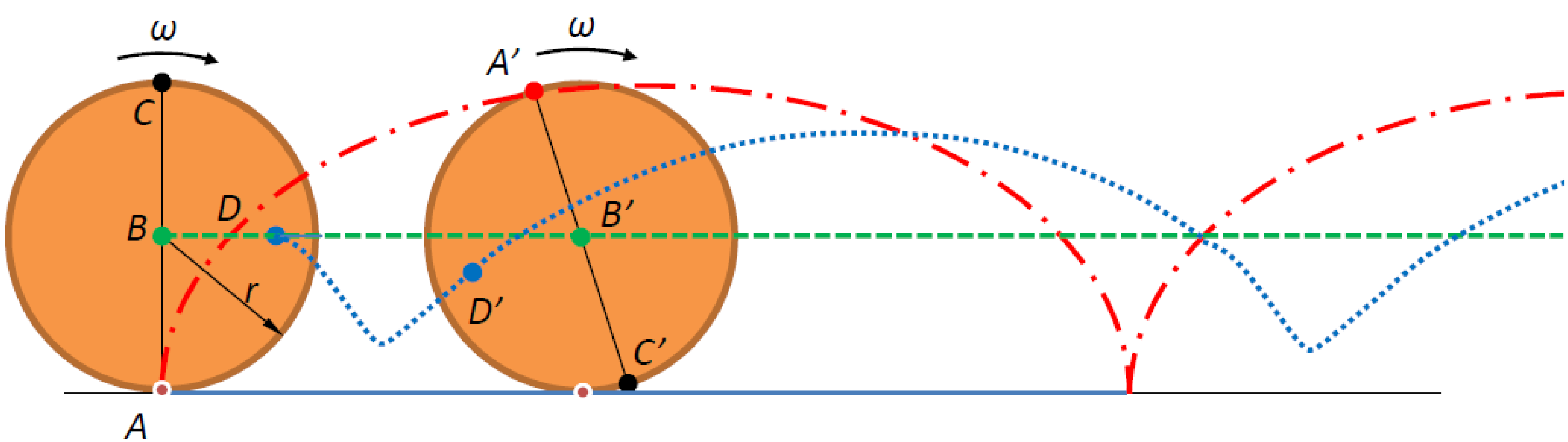
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = r\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

$$a_A = a_c$$

$$a_B = 0$$

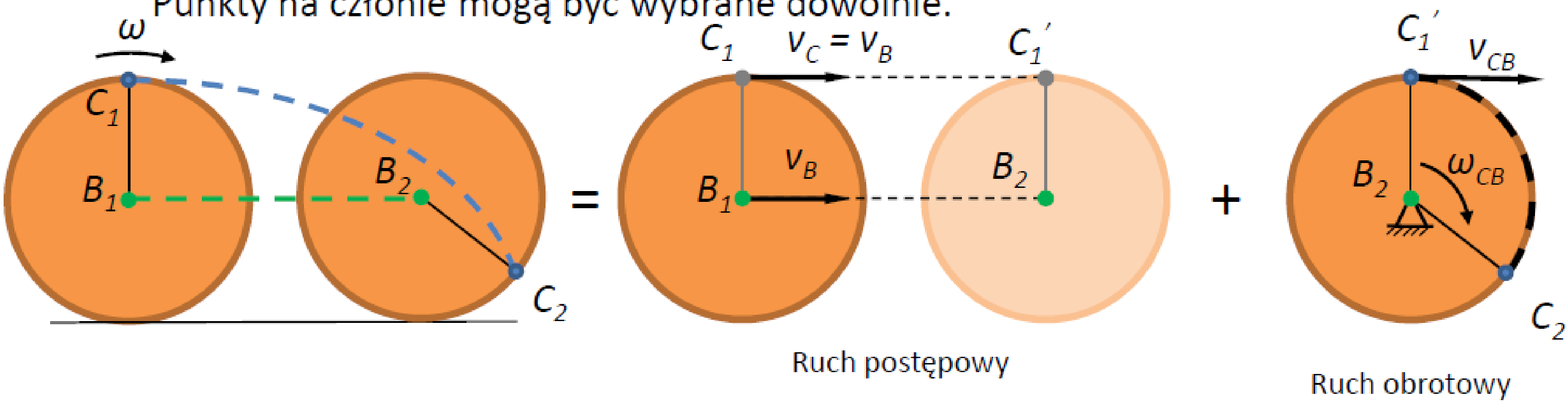
Rodzaje ruchu mechanizmów

Przypominając, ***ruch płaski*** ciała sztywnego zachodzi wtedy, jeśli wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny. Ruch postępowy i obrotowy są szczególnymi przypadkami ruchu płaskiego.



Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Ruch członu, **w nieskończenie krótkim okresie czasu**, jest traktowany jako złożony z dwóch ruchów - postępowego i obrotowego. W pierwszym kroku przemieszcza się koło z prędkością v_B z punktu B_1 do B_2, a następnie obraca względem tego punktu B_2 do momentu osiągnięcia przez punkt C_1' pozycji C_2. Punkty na członie mogą być wybrane dowolnie.



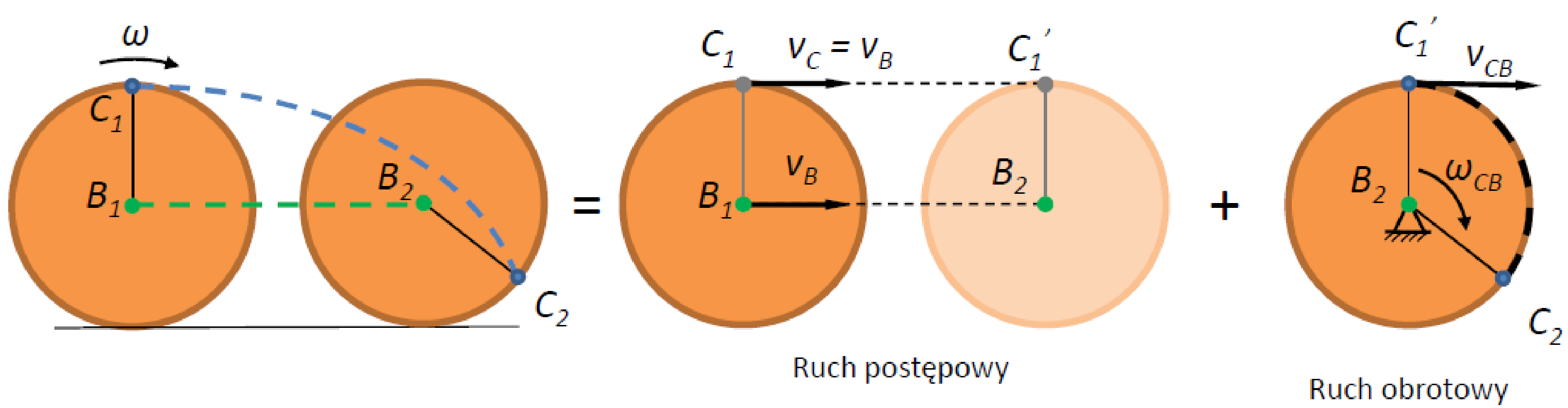
Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Prędkość punktu C równa jest sumie prędkości punktu B w ruchu postępowym i prędkości punktu C względem punktu B w ruchu obrotowym:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

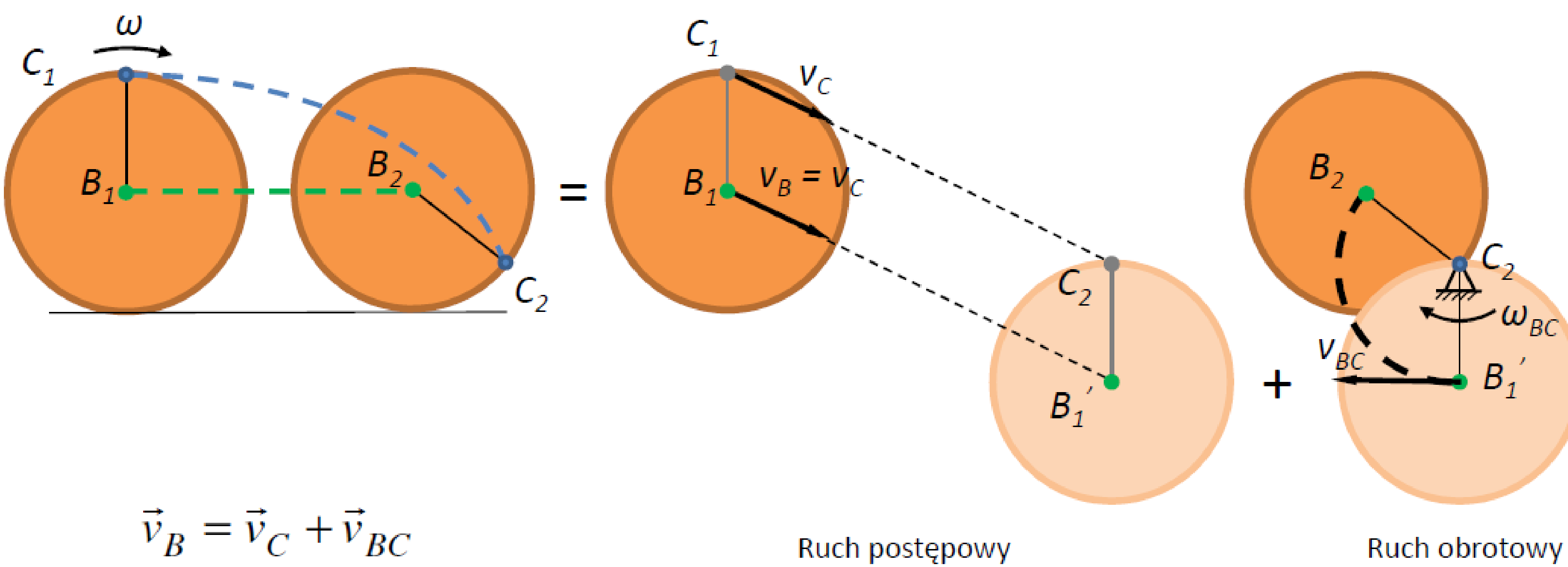
Prędkość względna jest zawsze prostopadła do prostej przechodzącej przez rozważane punkty i jest równa:

$$v_{CB} = \omega_{CB} r$$



Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

To samo przemieszczenie można rozpatrywać przemieszczając człon postępowo w celu zmiany położenia punktu z C_1 na C_2, a następnie obrót względem tego punktu tak, aby punkt B_1' osiągnął położenie B_2.



$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$$

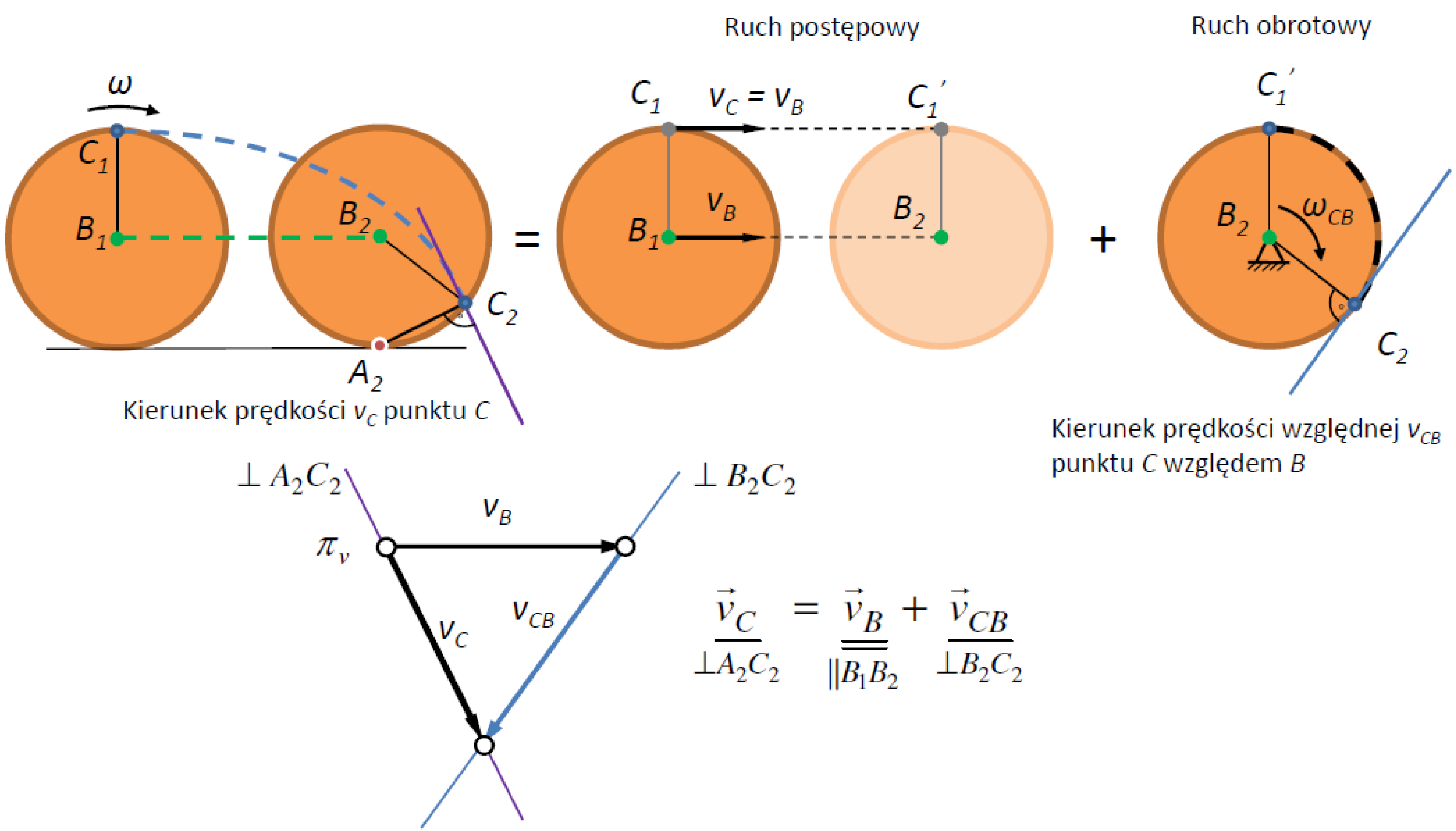
$$\vec{v}_{BC} = \omega_{BC} r$$

$$\vec{v}_{BC} = -\vec{v}_{CB}$$

Prędkości względne punktów członu są równe co do wartości i mają przeciwne zwroty.

Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

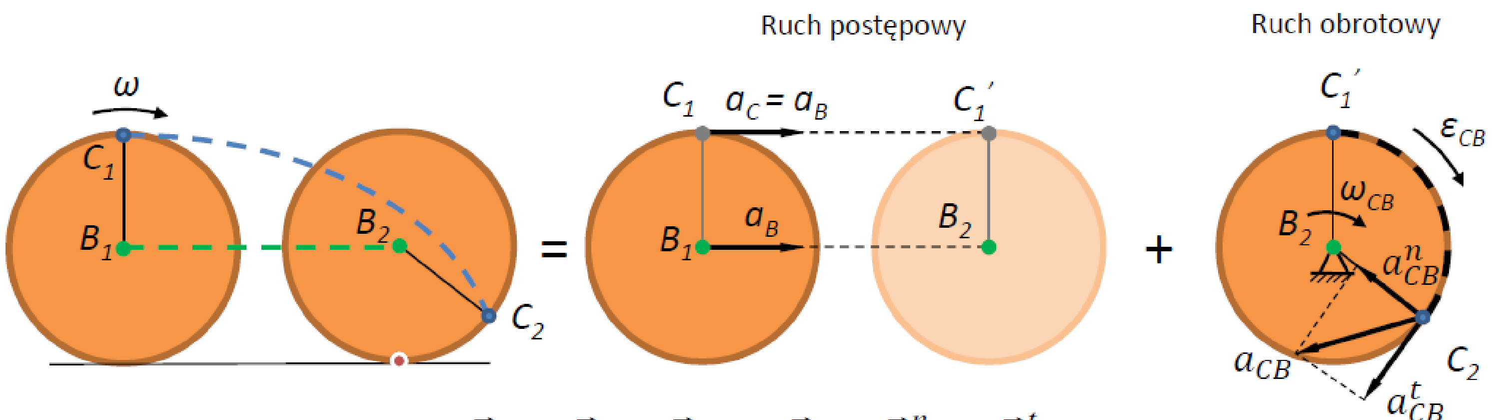
Mając informacje o prędkości jednego punktu i kierunku szukanej prędkości oraz prędkości względnej, możemy ją wyznaczyć graficznie.



$$\underset{\perp A_2C_2}{\underline{\vec{v}_C}} = \underset{\| B_1B_2}{\underline{\underline{\vec{v}_B}}} + \underset{\perp B_2C_2}{\underline{\vec{v}_{CB}}}$$

Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

W analogiczny sposób wyznacza się przyspieszenie punktu jako sumę przyspieszenia w ruchu postępowym i przyspieszenia względnego punktu w ruchu obrotowym.



$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,t}_{CB}$$

Przyspieszenie względne a_{CB} składa się z przyspieszenia normalnego i stycznego, ponieważ człon wykonuje ruch obrotowy:

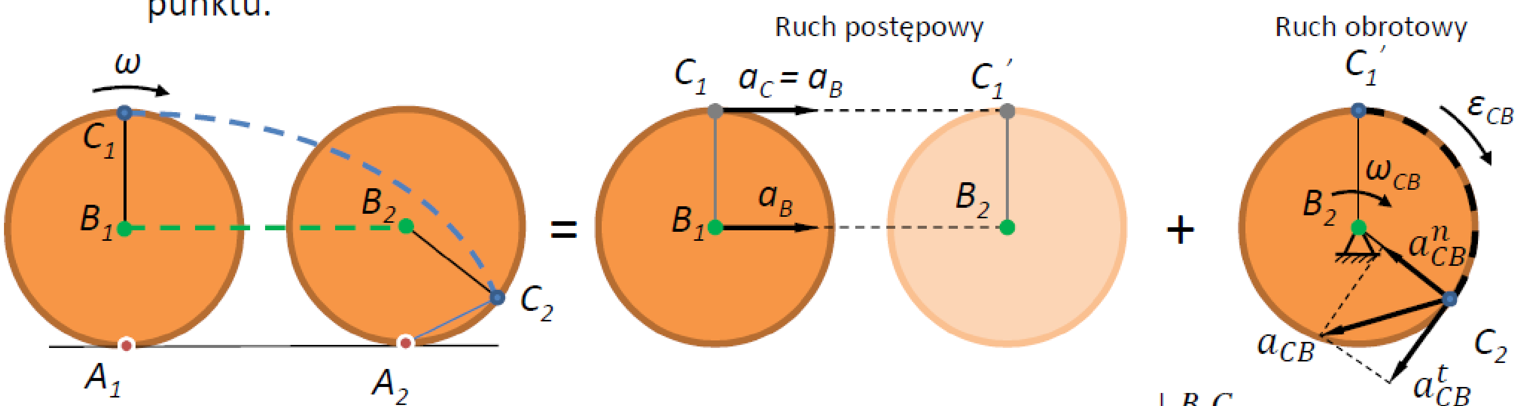
$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,t}_{CB}$$

$$a^n_{CB} = \omega_{CB}{}^2 r = \frac{v^2_{CB}}{r}$$

$$\vec{a}^{\,t}_{CB} = \vec{\varepsilon}_{CB} \times \vec{r}$$

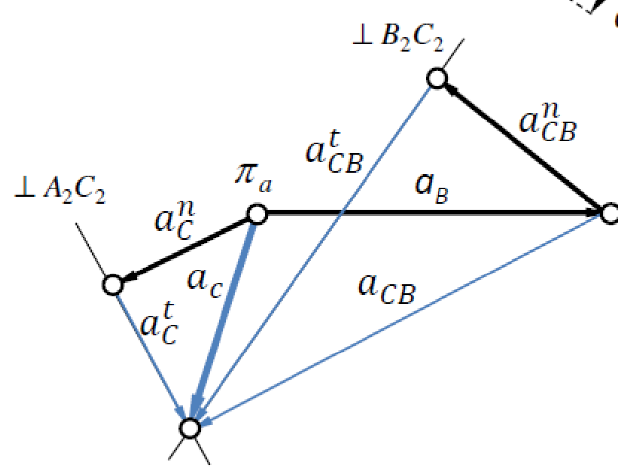
Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Znając przyspieszenie jednego punktu członu sztywnego oraz przyspieszenie względne normalne, kierunek przyspieszenia stycznego i kierunek szukanego przyspieszenia, możliwe jest graficzne wyznaczenie przyspieszenia drugiego punktu.



$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \underset{\|B_1B_2}{\underline{\underline{\vec{a}_B}}} + \underset{\|B_2C_2}{\underline{\underline{\vec{a}^n_{CB}}}} + \underset{\perp B_2C_2}{\underline{\vec{a}^t_{CB}}}$$

$$\vec{a}_C = \underset{\|A_2C_2}{\underline{\underline{\vec{a}^n_C}}} + \underset{\perp A_2C_2}{\underline{\vec{a}^t_C}}$$

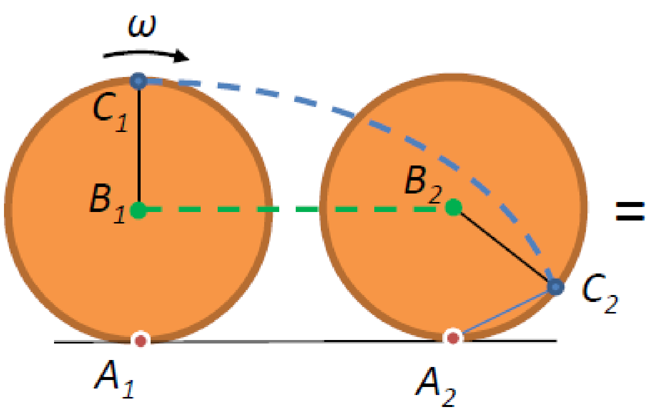


Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

W przypadku znajomości przyspieszenia punktu B i wyznaczaniu przyspieszenia punktu C metoda jest analogiczna i obowiązują zależności:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}$$

$$\vec{a}_{CB} = -\vec{a}_{BC}$$



Podane wzory są słuszne dla dowolnie wybranych punktów

Ruch płaski - chwilowy środek obrotu

Do wyznaczenia prędkości dowolnego punktu członu sztywnego w praktyce wymagana jest znajomość:

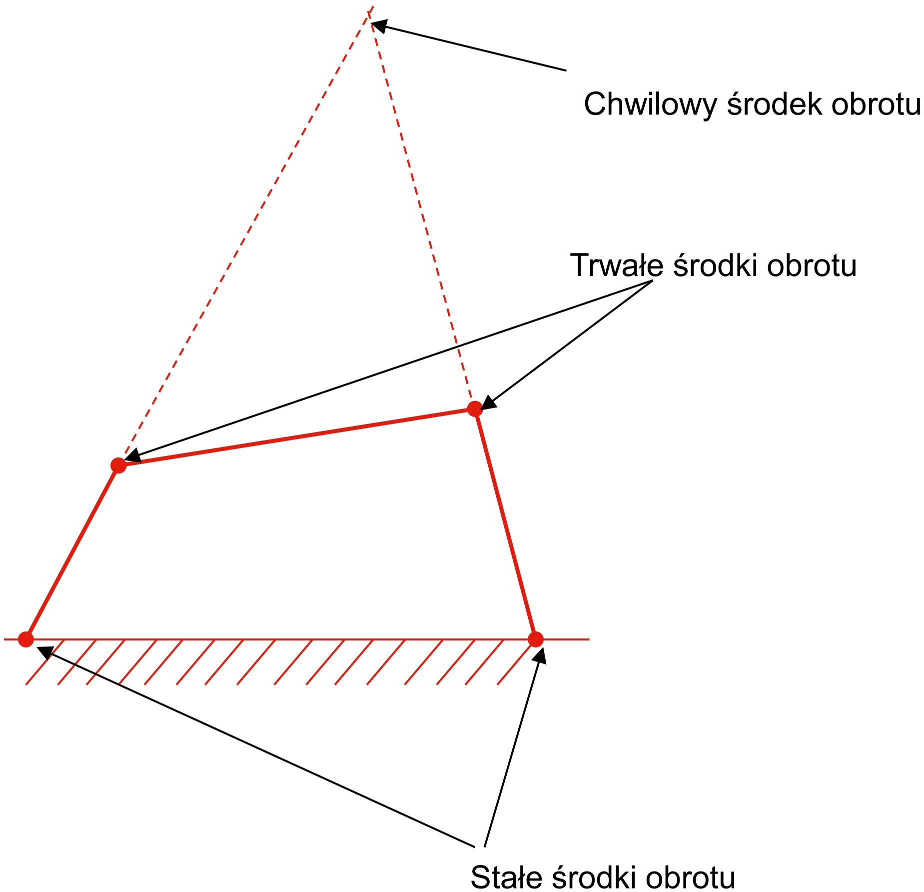
- prędkości jednego punktu,
- położenia chwilowego środka obrotu.

Dowolne przemieszczenie członu w ruchu płaskim może być przedstawione jako nieskończenie krótki ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu. Środek ten ma prędkość równą zero tylko w rozważanym momencie. W następnej chwili jego położenie jest inne.

Ruch płaski - chwilowy środek obrotu

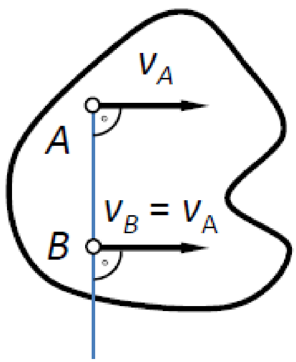
W mechanizmach możemy wyróżnić trzy rodzaje środków obrotu:

- Stałe
- Trwałe
- Chwilowe

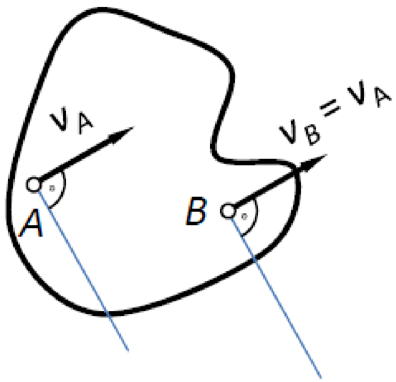


Ruch płaski - chwilowy środek obrotu

Jeżeli człon porusza się ruchem postępowym, dla którego jak pamiętamy prędkość kątowa jest równa zero, chwilowy środek obrotu znajduje się w nieskończoności.



$\omega = 0$

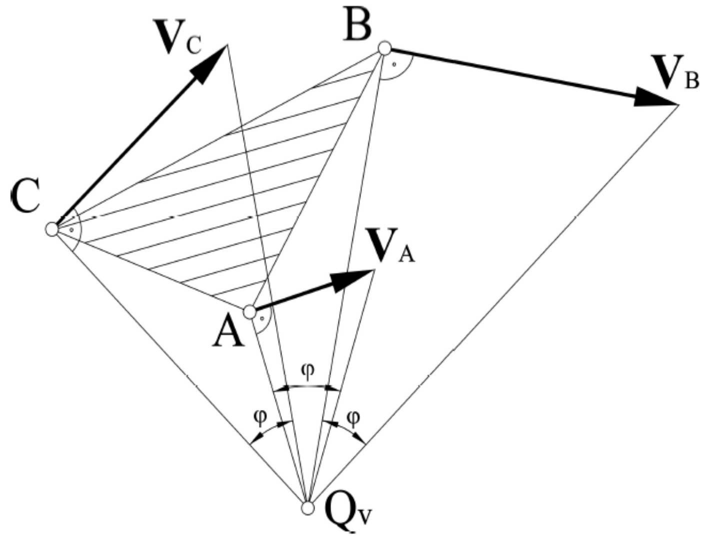


$\omega = 0$

Ruch płaski – chwilowy środek obrotu

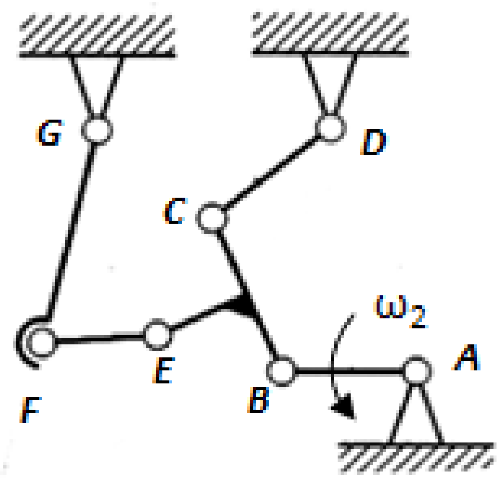
<u>Wyznaczenie chwilowego środka obrotu CSO</u>

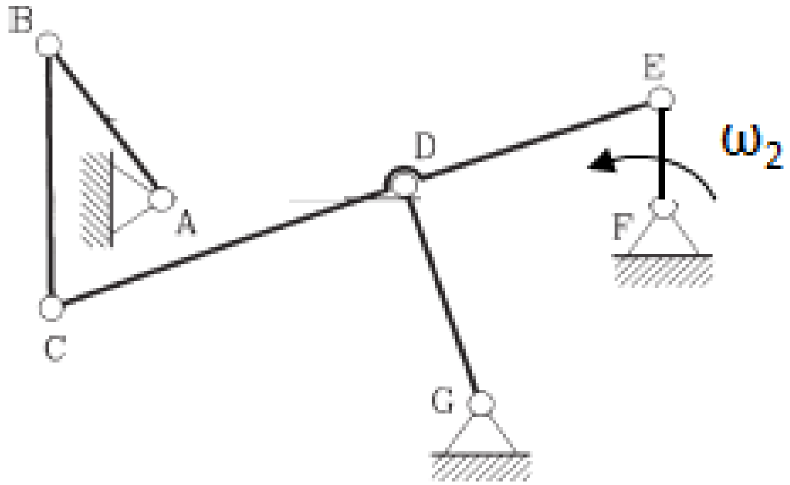
Wyznaczenie chwilowego środka obrotu w sposób graficzny jest możliwe przy znanych kierunkach prędkości liniowych dwóch punktów członu będącego w ruchu płaskim złożonym. Z punktów tych wyznacza się proste prostopadłe to wektorów prędkości tzw. linie zerowe lub promienie wodzące. Punkt przecięcia tych linii wyznacza chwilowy środek obrotu członu. Kąt utworzony pomiędzy linią wodzącą a linią wyznaczającą koniec wektora prędkości liniowej dla każdego punktu należącego do członu jest stały. Oznacza to, że wektory prędkości liniowych dowolnych punktów członu widziane z punktu CSO (*Qv*) tworzą jednakowy kąt φ.



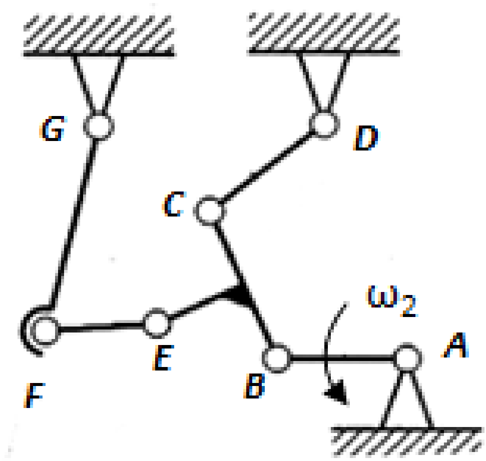
Ruch płaski - chwilowy środek obrotu

Wyznaczyć chwilowe środki obrotu mechanizmów

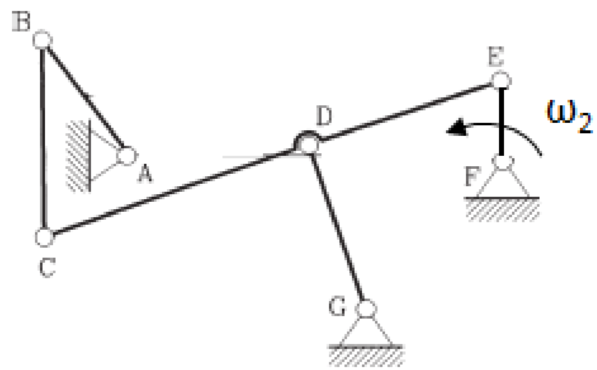




Ruch płaski - chwilowy środek obrotu



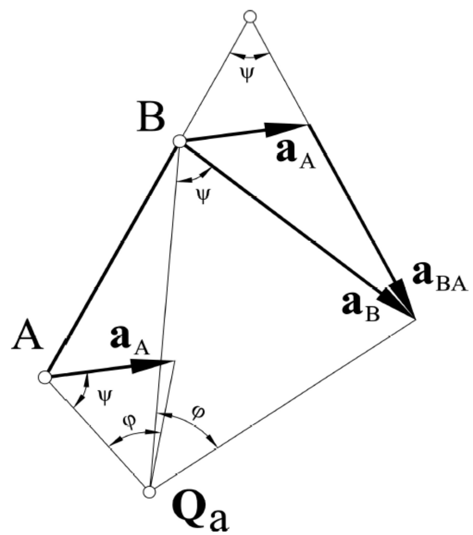
Ruch płaski - chwilowy środek obrotu



Ruch płaski – chwilowy środek przyspieszeń

Wyznaczenie chwilowego środka przyspieszeń CSP

Wyznaczenie chwilowego środka przyspieszeń w sposób graficzny jest możliwe przy znanych wartościach i kierunkach przyspieszeń dwóch punktów członu. Należy wyznaczyć moduł i kierunek wektora przyspieszenia względnego tych punktów. Następnie należy wyznaczyć kąt ψ jaki tworzy wektor prędkości względnej z linią wyznaczającą długość członu. Kolejno z wektorów przyspieszeń należy poprowadzić linie (wodzące) odchylone od kierunków tych wektorów pod kątem ψ. Kąt ten musi być zawsze kątem ostrym. Przecięcie linii wodzących przyspieszeń wyznacza chwilowy środek przyspieszeń członu *Qa*. Kąt utworzony pomiędzy linią wodzącą a linią wyznaczającą koniec wektora przyspieszenia dla każdego punktu należącego do członu jest stały. Oznacza to, że wektory przyspieszeń liniowych dowolnych punktów członu widziane z punktu CSP (Qa) tworzą jednakowy kąt φ.



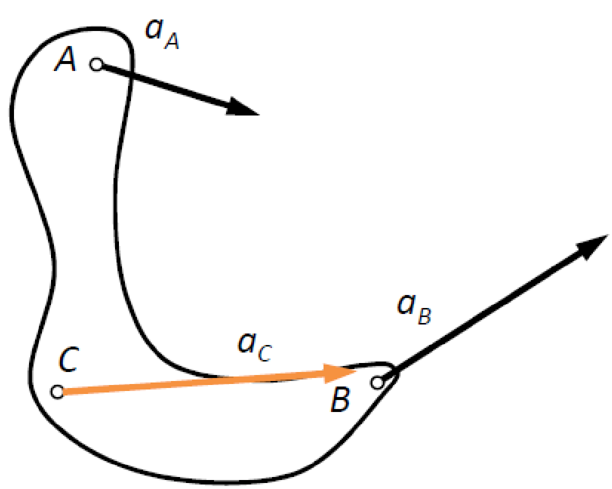
Ruch płaski – chwilowy środek przyspieszeń

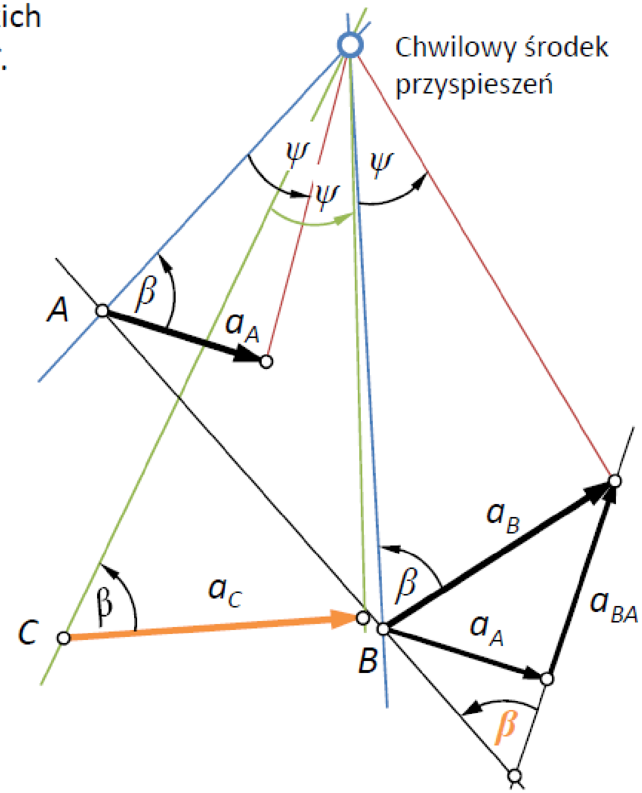
Przykład

Wyznaczyć przyspieszenie punktu *C* członu sztywnego metodą chwilowego środka przyspieszenia znając przyspieszenia punków *A* i *B*.

W rozwiązaniu korzysta się z zależności $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$ w celu określenia kąta β, wyznaczonego przez przyspieszenie względne a_{BA} i prostą przechodzącą przez punkty *A* i *B*. Następnie, pamiętając, że kąt ψ jest stały dla wszystkich punktu członu, wyznacza się przyspieszenie punktu *C*.

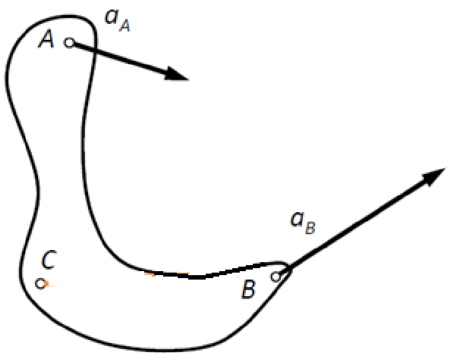
Więcej szczegółów o tej metodzie można uzyskać w Leyko 2012 i Młynarski 1992.





Ruch płaski - chwilowy środek przyspieszeń

Wyznaczyć graficznie chwilowy środek przyspieszeń

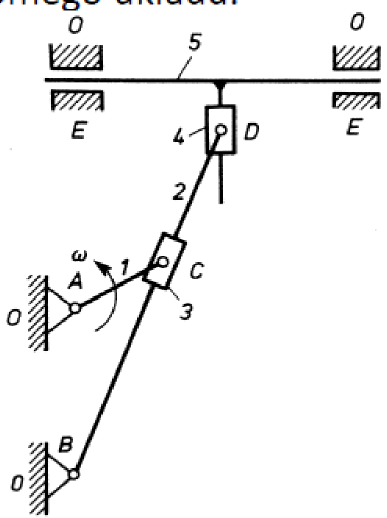


Ruch względny

W technice spotyka się mechanizmy, w których jeden człon porusza się po drugim członie również będącym w ruchu. Dobrym przykładem jest ruchoma prowadnica i suwak. Bezpośrednie wyznaczenie prędkości i przyspieszenia suwaka względem podstawy (układu nieruchomego) jest zadaniem trudnym. Dlatego ruch suwaka rozpatruje się jeszcze względem drugiego ruchomego układu sztywno związanego z prowadnicą. W mechanice stosuje się następującą terminologię do określenia tych ruchów:

- ***ruch bezwzględny*** – ruch członu względem nieruchomego układu odniesienia,
- ***ruch względny*** – ruch członu względem ruchomego układu odniesienia,
- ***ruch unoszenia*** – ruch ruchomego układu względem nieruchomego układu.

W przykładzie ruchomej prowadnicy i suwaka *ruch bezwzględny* jest to ruch suwaka względem podstawy, *ruch względny* to ruch suwaka względem prowadnicy, a *ruch unoszenia* to ruch prowadnicy względem podstawy.



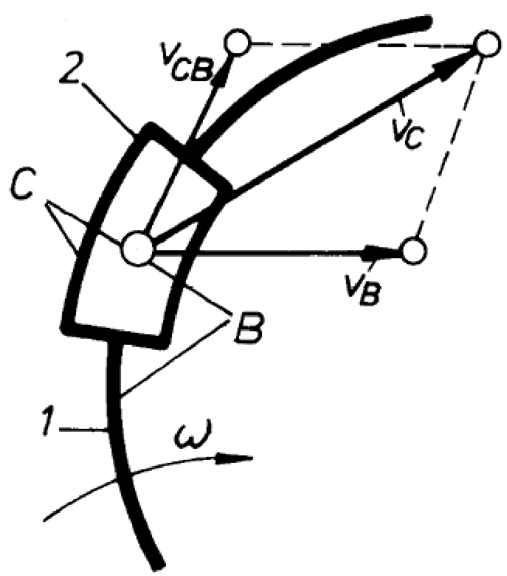
Ruch względny

Wzory na obliczanie prędkości i przyspieszeń z zastosowaniem ruchu względnego zostaną przedstawione na przykładzie suwaka i ruchomej prowadnicy.
Prędkość suwaka v_C w punkcie *C* jest równa:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

v_{CB} - jest to prędkość względna (w ruchu względnym) punktu *C* względem B i jest zawsze styczna do prowadnicy (prowadnica nieruchoma, suwak ruchomy).

v_B – jest to prędkość punktu *B*, czyli unoszenia. Punkt B należy do prowadnicy i w rozpatrywanym momencie pokrywa się z punktem *C* należącym do suwaka.
Prędkość punktu *B* wynika z ruchu prowadnicy i powinna być znana. Prowadnica może być w ruchu postępowym, obrotowym lub płaskim.



Ruch względny

Przyspieszenie punktu *C* względem *B* jest równe:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$

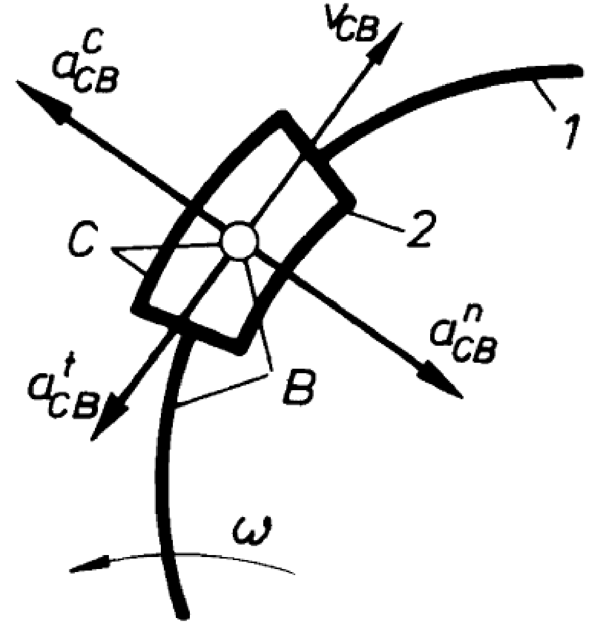
a_{CB} przyspieszenie punktu *C* względem *B*

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}^{\,n}_{CB} + \vec{a}^{\,t}_{CB} + \vec{a}^{\,c}_{CB}$$

Przyspieszenie normalne

Przyspieszenie styczne

Przyspieszenie Coriolisa



Ruch względny

a_{CB}^{n} Przyspieszenie normalne

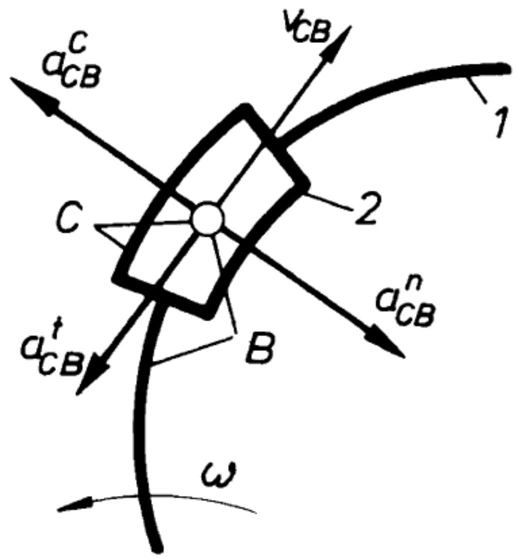
$$a_{CB}^{n} = \frac{v_{CB}^{2}}{\rho}$$

Zwrot przyspieszenia jest zgodny z promieniem krzywizny suwaka i skierowany jest w stronę jego środka.

ρ - promień krzywizny suwaka.

Jeśli suwak jest prostoliniowy ($\rho = \infty$), przyspieszenie normalne wynosi 0

$$\vec{a}_{CB}^{n} = \frac{v_{CB}^{2}}{\infty} = 0$$

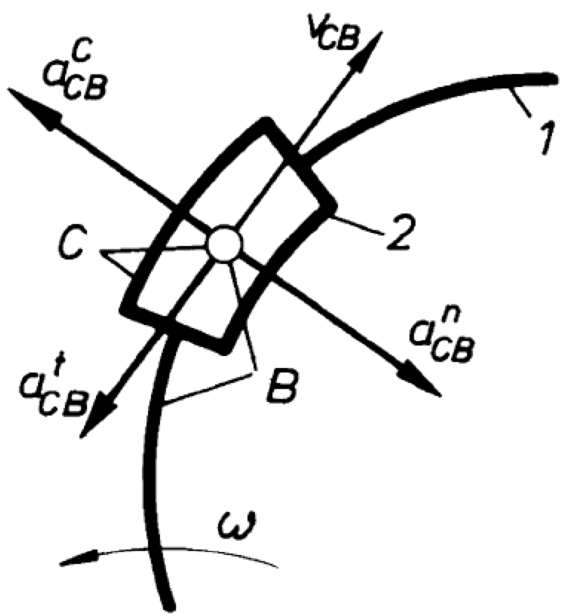


Ruch względny

a^{t}_{CB} Przyspieszenie styczne

$$a^{t}_{CB} = \frac{dv_{CB}}{dt}$$

Kierunek przyspieszenia stycznego jest styczny do toru (prowadnicy)



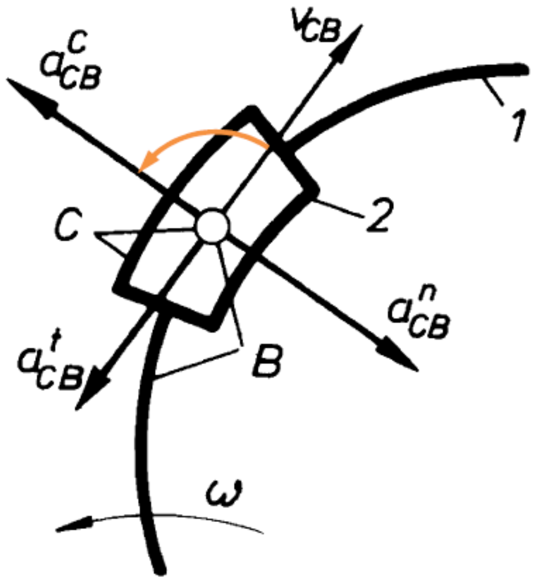
Ruch względny

a_{CB}^{c} Przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}_{CB}^{\,c} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_{CB}$$

Kierunek przyspieszenia Coriolisa jest wyznaczany przez obrót wektora prędkości względnej v_{CB} o kąt prosty, w kierunku zgodnym z prędkością kątową ω.

Przyspieszenie Coriolisa jest równe 0, kiedy prędkość kątowa ω = 0 (prowadnica jest nieruchoma albo poruszą się ruchem postępowym) lub prędkość względna v_{CB} = 0 (suwak nie porusza się względem prowadnicy).



Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Metody graficzne

Metody graficzne w bardzo prosty i bardzo poglądowy sposób umożliwiają wyznaczenie parametrów ruchu mechanizmów. Znajomość metod graficznych ułatwia analityczny zapis parametrów ruchu. Wadą tych metod jest to, że uzyskane wyniki z reguły dotyczą jednego położenia członów i charakteryzują się określoną dokładnością zależną od stosowanych podziałek.

Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Podziałki

W celu wyznaczenia parametrów kinematycznych należy narysować schemat kinematyczny oraz wyznaczyć plan prędkości i przyspieszeń. Wymaga to przyjęcia odpowiednich podziałek rysunkowych.

Podziałka rysunkowa definiowana jest jako stosunek wartości wielkości fizycznej do wartości wielkości rysunkowej:

$\kappa_l = \frac{l}{(l)} \left[\frac{m}{mm}\right]$ podziałka długości,

$\kappa_v = \frac{v}{(v)} \left[\frac{m/s}{mm}\right]$ podziałka prędkości liniowej,

$\kappa_a = \frac{a}{(a)} \left[\frac{m/s^2}{mm}\right]$ podziałka przyspieszenia liniowego.

Przykład

1. Dana jest prędkość $v = 500$ m/s, podziałka $\kappa_v = 10 \left[\frac{m/s}{mm}\right]$. Wyznaczyć długość wektora prędkości na rysunku.

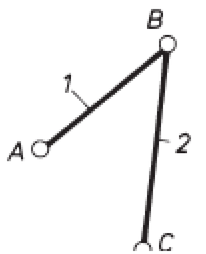
$$(v) = \frac{v}{\kappa_v}\left[\frac{m}{s} / \frac{m/s}{mm}\right] = \frac{500\ m/s}{10\,\frac{m/s}{mm}} = 50\ mm$$

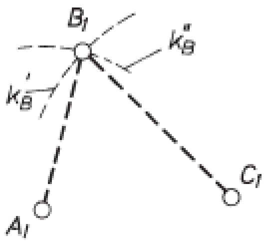
2. Dana jest długości wektora prędkości $v_l = 50$ mm, podziałka $\kappa_v = 10 \left[\frac{m/s}{mm}\right]$. Wyznaczyć wartość prędkości.

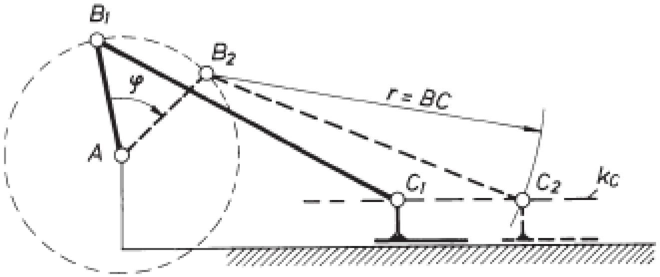
$$v = (v)\kappa_v \left[mm\frac{m/s}{mm}\right] = 50\ mm \cdot 10\frac{\frac{m}{s}}{mm} = 500\ m/s$$

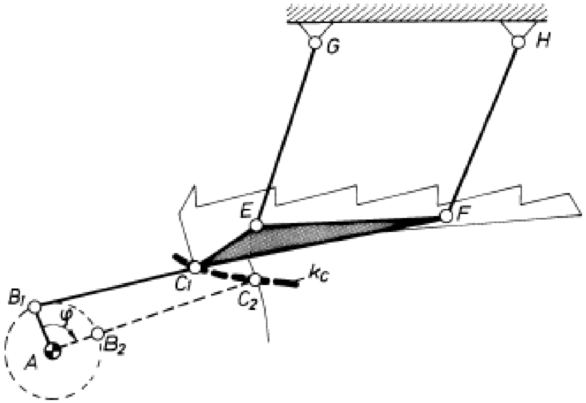
Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Położenia członów



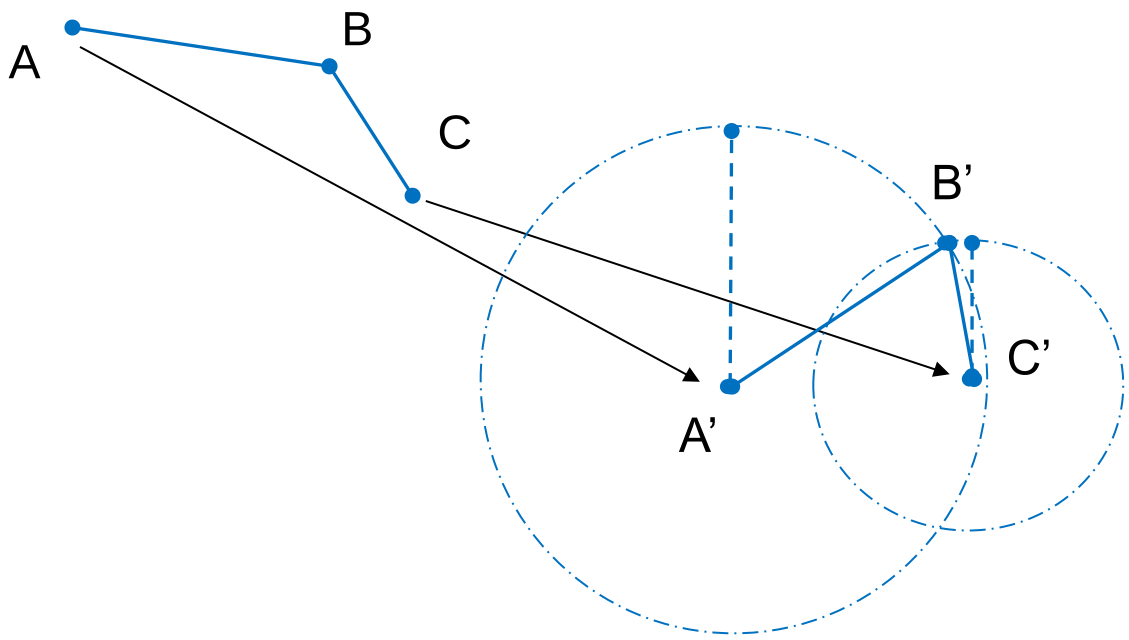






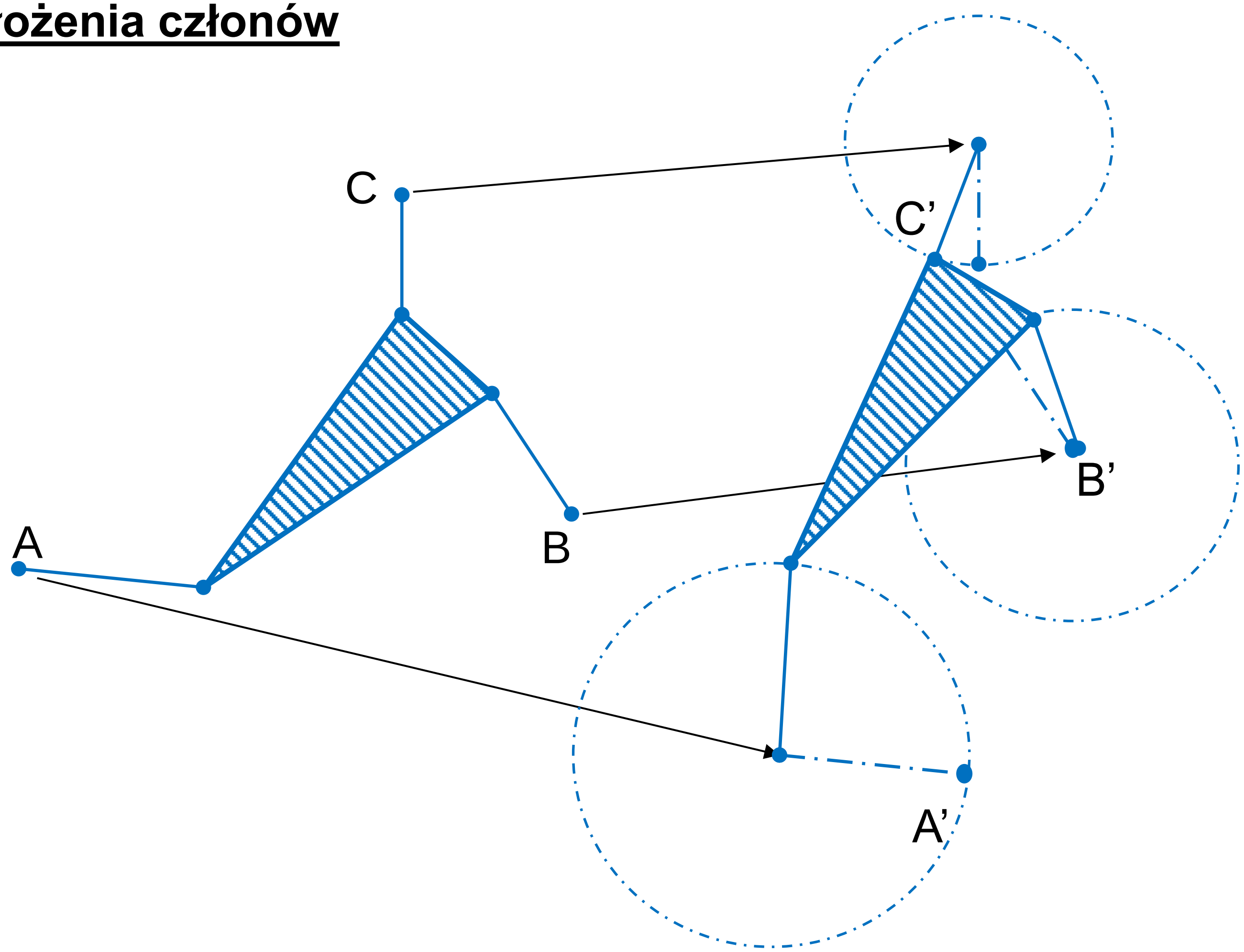
Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Położenia członów

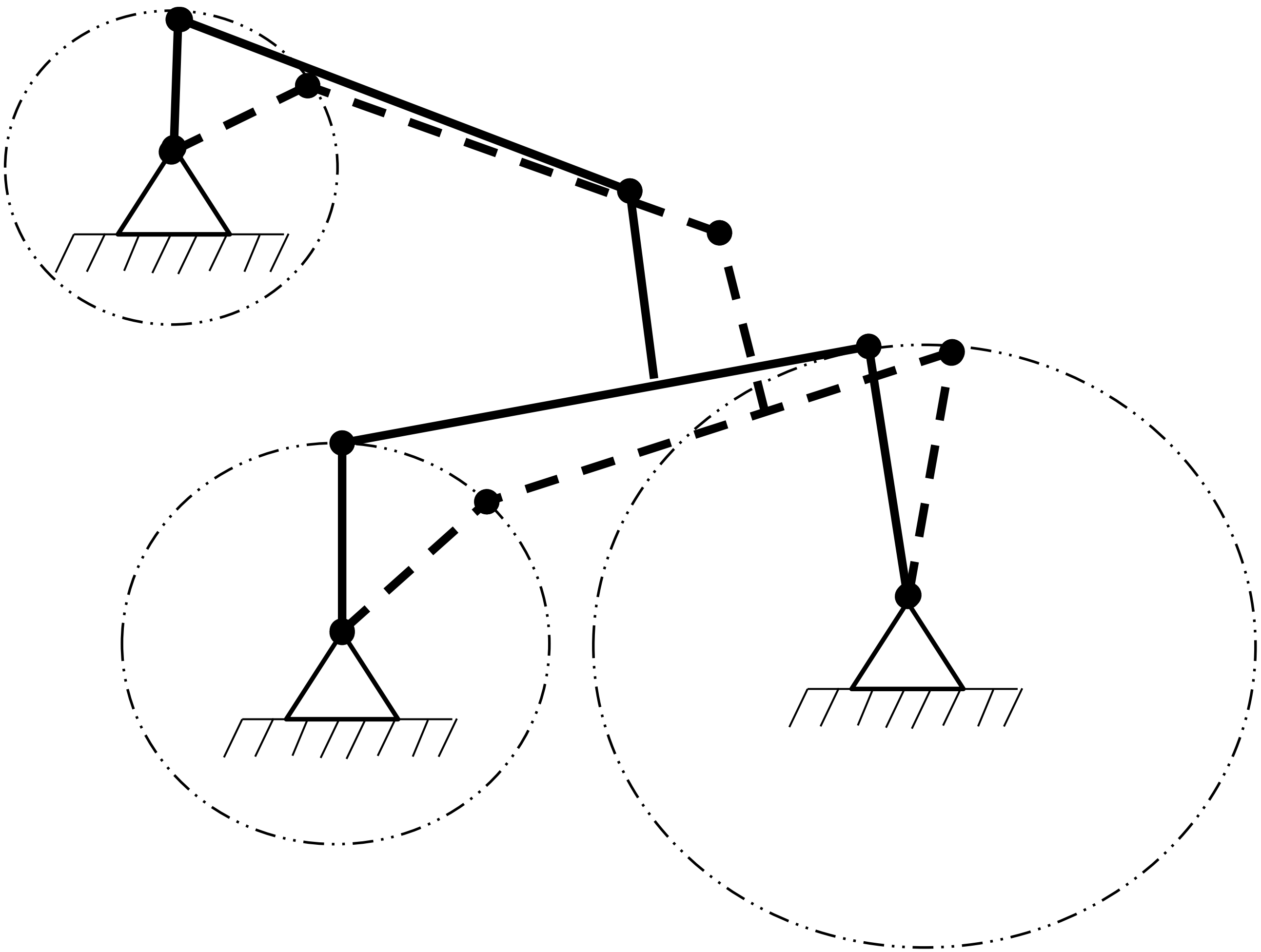


Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Położenia członów



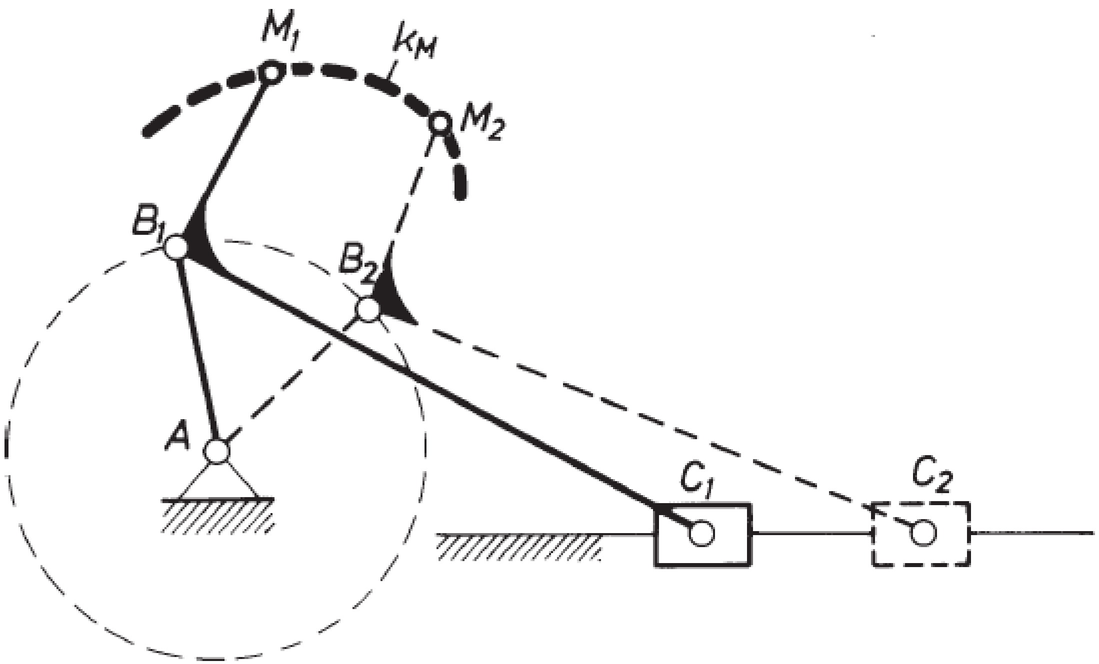
Położenie, prędkości i przyspieszenie członów



Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Trajektorie

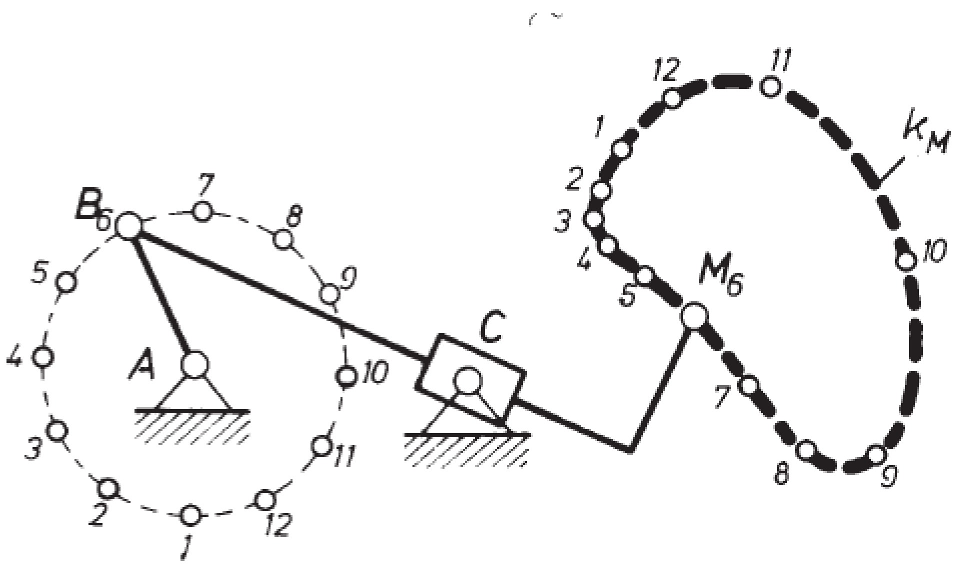
Trajektorią lub torem ruchu nazywamy kolejne położenia ruchomych punktów członu. Do wyznaczenia trajektorii punktów członów stosuje się metodę kolejnych położeń lub metodę wzorników.



Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Tor cechowany

Jeżeli na wykreślonej trajektorii dowolnego punktu członu nanieść jego kolejne położenia zajmowane w równych odstępach czasu wtedy taki tor nazywamy torem cechowanym.

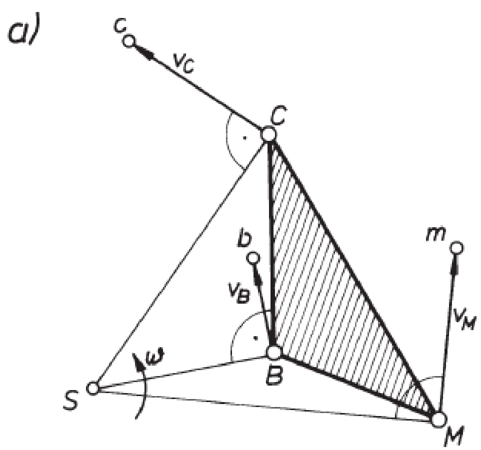


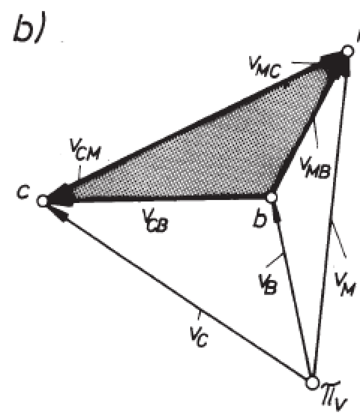
Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Plan prędkości

I Zasada Burmestra

Jeżeli dane są prędkości $\boldsymbol{V_B}$,$\boldsymbol{V_C}$ i $\boldsymbol{V_M}$ członu ***BCM*** to po narysowaniu ich wektorów ze wspólnego punktu (tzw. bieguna prędkości) ich końce utworzą figurę ***bcm*** podobną do członu ***BCM*** lecz obróconą o kąt 90 stopni zgodnie z kierunkiem chwilowego środka obrotu. Figura ***bcm*** wraz z wektorami $\boldsymbol{V_B}$,$\boldsymbol{V_C}$ i $\boldsymbol{V_M}$ tworzy tzw. plan prędkości. Boki figury ***bcm*** na planie prędkości wyznaczają kierunek, moduł i zwrot wektorów prędkości względnych tego członu.





$$\overline{v}_C = \overline{v}_B + \overline{v}_{CB},$$

$$\overline{v}_M = \overline{v}_B + \overline{v}_{MB},$$

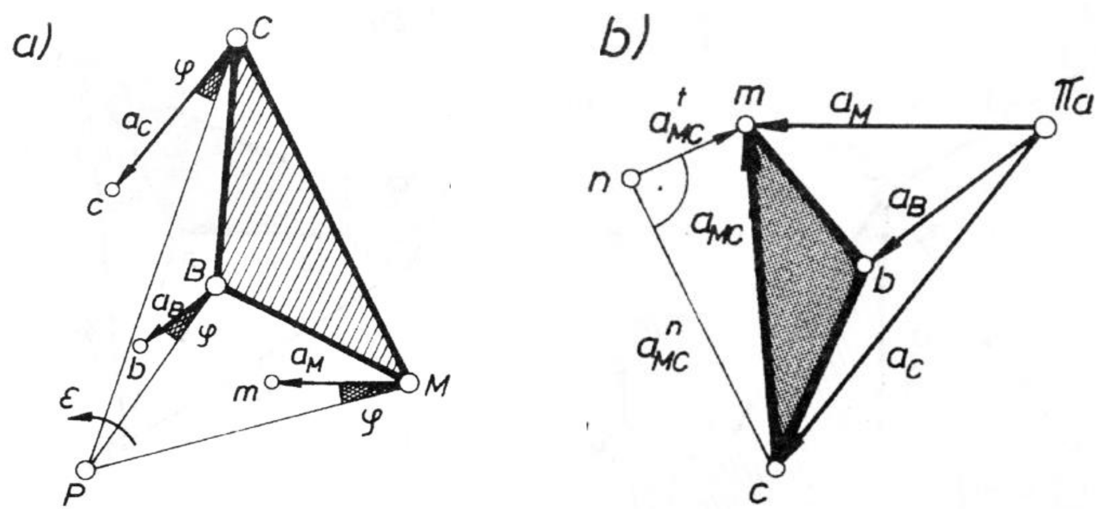
$$\overline{v}_M = \overline{v}_C + \overline{v}_{MC}$$

Położenie, prędkości i przyspieszenie członów

Plan przyspieszeń

II Zasada Burmestra

Jeżeli dane są przyspieszenia ***a**$_B$* ,***a**$_C$* i ***a**$_M$* członu ***BCM*** to po narysowaniu ich wektorów ze wspólnego punktu (tzw. bieguna przyspieszeń) ich końce utworzą figurę ***bcm*** podobną do członu ***BCM*** lecz obróconą o kąt 180-φ zgodnie z kierunkiem chwilowego środka przyspieszeń. Figura ***bcm*** wraz z wektorami przyspieszeń ***a**$_B$*, ***a**$_C$* i ***a**$_M$* tworzy tzw. plan przyspieszeń. Boki figury ***bcm*** na planie przyspieszeń wyznaczają kierunek, moduł i zwrot wektorów przyspieszeń względnych tego członu.



$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

$$\bar{a}_{MC} = \bar{a}^{n}_{MC} + \bar{a}^{t}_{MC}$$

$$a^{n}_{NC} = \frac{v^{2}_{MC}}{l_{MC}}$$

$$a^{t}_{MC} = \varepsilon\, l_{MC}$$

Dziękuję za uwagę